# 专题 1 集合、命题与不等式

**【考点 1】集合的关系及运算**

**【知识精讲】**

1、集合的含义及表示
- 集合中元素的特征
  - 确定性
  - 互异性
  - 无序性
- 集合与元素的关系：$\in$　$\notin$
- 集合的表示
  - 列举法
  - 描述法
- 常见的数集　N　$N^*$　Z　Q　R

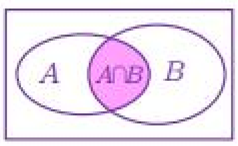
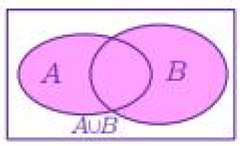
**2、元素与集合的关系**

| 关系 | 概念 | 计法 | 读法 |
|---|---|---|---|
| 属于 | a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A | a∈A | a 属于集合 A |
| 不属于 | A 不是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A | a ∉A | a 不属于集合 A |

**3、集合与集合的关系**

| 关系 | 概念 | 计法 | 读法 |
|---|---|---|---|
| 子集 | 两个集合 A 和 B，如果集合 A 中任何一个元素都属于集合 B，那么集合 A 叫作 B 的子集 | A $\subseteq$B | A 包含于 B |
| 真子集 | 两个集合 A 和 B，如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫作 B 的真子集 | A | A 真包含于 B |
| 空集 | | | |

**4、集合的运算**

| 运算 | 交集 | 并集 | 补集 |
|---|---|---|---|
| 语言描述 | 属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合 | A 所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合 | 全集中集合 A 以外的部分称为集合 A 的补集 |
| 表示 | $A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$ | $A\cap B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$ | $C_uA=\{x\mid x\in U或x\notin A\}$ |
| Veen 图 |  |  |  |

**【历年真题】**

**Round1:基础必过题**

1．（2021 秋•静安区期末 2）设集合 $A=\{y|y=(\frac{1}{2})^x，x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{y|y=x^{\frac{1}{2}}，x\geqslant 0\}$，

则 $A\cap B$＝______．

2．（2021秋•金山区期末1）已知集合 $A=\{x|x>2\}$，$B=\{x|x<3\}$，则 $A\cap B$＝______．

3．（2021秋•徐汇区期末1）已知集合 $M=\{x|x^2-2x>0\}$，$N=\{x||x|\leqslant 1\}$，则 $M\cup \mathbf{N}$＝____．__

4．（2021秋•奉贤区期末1）已知集合 $A=\{1，2\}$，$B=\{2，a\}$，若 $A\cup B=\{1，2，3\}$，则 $a$＝____．

5．（2021秋•青浦区期末1）若全集 $U=\{1，2，3，4，5，6\}$，$M=\{1，3，4\}$，$N=\{2，3，4\}$，则集合$\complement_U(M\cap \mathbf{N})$＝____．

5．（2021秋•黄浦区期末1）设 $m\in\mathbf{R}$，已知集合 $A=\{1，3，m\}$，$B=\{3，4\}$，若 $A\cup B=\{1，2，3，4\}$，则 $m$＝____．

6．（2021秋•杨浦区期末2）已知集合 $A=\{1，2，3，4\}$，$B=\{x|x\leqslant \dfrac{5}{2}，x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B$＝______．

7．（2021秋•长宁区期末1）已知集合 $A=\{x|x\leqslant 2\}$，$B=\{1，3，5，7\}$，则 $A\cap B$＝____．

8．（2021秋•浦东新区期末4）已知集合 $A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|\dfrac{x}{x-2}<0\}$，则 $A\cap B$＝____．

9．（2021秋•闵行区期末2）已知集合 $A=\{3，m\}$，$B=\{m，m+1\}$，若 $A\cap B=\{4\}$，则 $A\cup B$＝____．

10．（2021秋•松江区期末1）已知集合 $A=\{1，2，3，4，5\}$，$B=\{x|2x-6<0\}$，则 $A\cap B$＝____．

11．（2021秋•嘉定区期末1）已知集合 $A=\{x|-1<x<3\}$，$B=\{0，2，4\}$，则 $A\cap B$＝__．

12．（2021秋•虹口区期末1）已知集合 $A=\{1，2，4\}$，$B=\{y|y=\log_2 x，x\in A\}$，则 $A\cup B$＝________．

13．（2021秋•普陀区期末1）若集合$\{a，2\}\cup\{3\}=\{2，3\}$，则实数 $a$＝____．

14．（2021秋•崇明区期末1）已知集合 $A=\{l，2\}$，$B=\{a，3\}$，若 $A\cap B=\{1\}$，则 $A\cup B$＝______．

15. （2021 秋•宝山区期末 2）已知集合 $A=\{-1, 0, 1, 2\}$，$B=\{x|0<x<3\}$，则 $A\cap B=$________.

Round2:能力提高题

16. （2021 秋•普陀区期末 9）设非空集合 $Q\subseteq M$，当 $Q$ 中所有元素和为偶数时（集合为单元素时和为元素本身），称 $Q$ 是 $M$ 的偶子集．若集合 $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，则其偶子集 Q 的个数为________.

**【考点 2】命题**

**【知识精讲】**

**1、命题：**可以判断真假的陈述语句称为命题

**2、真值表**

| P | Q | 非 p | P 或 q | P 且 q |
|---|---|---|---|---|
| 真 | 真 | 假 | 真 | 真 |
| 真 | 假 | 假 | 真 | 假 |
| 假 | 真 | 真 | 真 | 假 |
| 假 | 假 | 真 | 假 | 假 |

**3、真值表**

原命题：若 p 则 q　逆命题：若 q 则 p，否命题：若非 P 则非 q

逆否命题：若非 q 则非 p

| 原命题 | 逆命题 | 否命题 | 逆否命题 |
|---|---|---|---|
| 真 | 真 | 真 | 真 |
| 真 | 假 | 假 | 真 |
| 假 | 真 | 真 | 假 |
| 假 | 假 | 假 | 假 |

**【历年真题】**

Round1:基础必过题

1. （2021 秋•奉贤区期末 15）对于下列命题：①若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $\frac{a+c}{d}>\frac{b+d}{c}$；

②若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $a^c>b^d$.关于上述命题描述正确的是（　　）

A．①和②均为真命题　　B．①和②均为假命题

C．①为真命题，②为假命题　　D．①为假命题，②为真命题

Round2:能力提高题

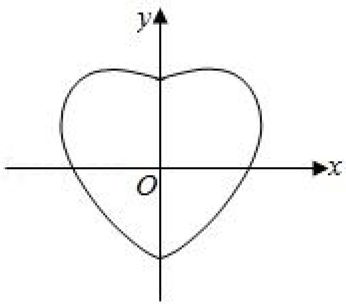
2. （2021 秋•杨浦区期末 16）已知非空集合 $A$，$B$ 满足：$A\cup B=R$，$A\cap B=\emptyset$，函数

$f(x)=\begin{cases}x^2, x\in A\\ 2x-1, x\in B\end{cases}$，对于下列两个命题：①存在唯一的非空集合对（$A$，$B$），使得 $f$（$x$）为偶函数；②存在无穷多非空集合对（$A$，$B$），使得方程 $f$（$x$）＝2 无解．下面判断正确的是（　　）

A．①正确，②错误　　B．①错误，②正确

C．①、②都正确　　D．①、②都错误

3．（2021 秋•崇明区期末 16）数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线 $C$：$x^2+y^2=1+|x|y$ 就是其中之一（如图），给出下列两个命题：命题 $q_1$：曲线 $C$ 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$；命题 $q_2$：曲线 $C$ 所围成的“心形”区域的面积小于 3．则下列说法正确的是（　　）




A．命题 $q_1$ 是真命题，命题 $q_2$ 是假命题

B．命题 $q_1$ 是假命题，命题 $q_2$ 是真命题

C．命题 $q_1$，$q_2$ 都是真命题

D．命题 $q_1$，$q_2$ 都是假命题

4．（2021 秋•徐汇区期末 15）已知曲线 $C$：$\frac{x|x|}{4}+\frac{y|y|}{3}=-1$，对于命题：①垂直于 $x$ 轴的直线与曲线 $C$ 有且只有一个交点；②若 $P_1$（$x_1$，$y_1$），$P_2$（$x_2$，$y_2$）为曲线 $C$ 上任意两点，则有 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}<0$．下列判断正确的是（　　）

A．①和②均为真命题　　B．①和②均为假命题

C．①为真命题，②为假命题　　D．①为假命题，②为真命题

**【考点 3】充要条件**

**【知识精讲】**

**1．充分条件、必要条件与充要条件的概念**

（1）充分条件：若 $p \Rightarrow q$，则 $p$ 是 $q$ 充分条件.

（2）必要条件：若 $q \Rightarrow p$，则 $p$ 是 $q$ 必要条件.

（3）充要条件：若 $p \Rightarrow q$，且 $q \Rightarrow p$，则 $p$ 是 $q$ 充要条件.

注：如果甲是乙的充分条件，则乙是甲的必要条件；反之亦然.

**【历年真题】**

1．（2021 秋•金山区期末 13）已知 $a$、$b$∈**R**，则“$\frac{b}{a}>1$”是“$b>a$”的（　　）条件

A．充分非必要 B．必要非充分　C．充要　　D．非充分非必要

2．（2021 秋•徐汇区期末 13）已知 $a$，$b$∈**R** 且 $a$•$b$≠0，则“$a<b$”是“$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$”的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分又非必要条件

3．（2021 秋•青浦区期末 14）已知公差为 $d$ 的等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$，则“$S_n - na_n<0$，对 $n>1$，$n$∈$\mathbf{N}^*$恒成立”是“$d>0$”的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

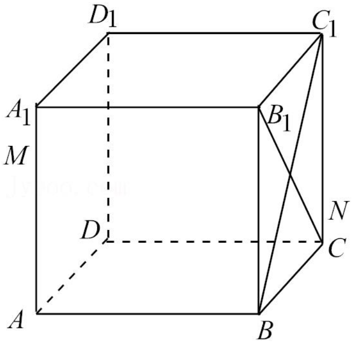
C．充要条件　　D．非充分也非必要条件

4．（2021 秋•黄浦区期末 14）若 $z_1$、$z_2$∈**C**，则“$z_1$、$z_2$ 均为实数”是“$z_1 - z_2$ 是实数”的（　　）条件

A．充分非必要　　B．必要非充分

C．充要　　D．非充分非必要

5．（2021 秋•杨浦区期末 15）如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $M$、$N$ 分别在棱 $AA_1$、$CC_1$ 上，则“直线 $MN$⊥直线 $C_1B$”是“直线 $MN$⊥平面 $C_1BD$”的（　　）




A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

6．（2021 秋•长宁区期末 13）“$\frac{1}{x}<1$”是“$x>1$”的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．非充分也非必要条件

7．（2021 秋•嘉定区期末 13）已知 $x\in\mathbf{R}$，则“$|x|>1$”是“$x>1$”的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分又非必要条件

8．（2021 秋•虹口区期末 13）设α：实数 $x$ 满足$\frac{x-3}{x+1}<0$，β：实数 $x$ 满足$|x-1|<2$，那么α是β的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分又非必要条件

8．（2021 秋•普陀区期末 13）设 $a$，$m$ 是实数，则“$m=5$”是“$m$ 为 $a$ 和 $10-a$ 的等差中项”的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分也非必要条件

9．（2021 秋•宝山区期末 13）“$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$”是“直线 $a_1x+b_1y=1$ 和 $a_2x+b_2y=1$ 平行”

的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．非充分又非必要条件

Round2:能力提高题

10．（2021秋•崇明期末15）设 $O$ 为△$ABC$ 所在平面上一点．若实数 $x$、$y$、$z$ 满足 $x$

$x\overline{OA}+y\overline{OB}+z\overline{OC}=\vec{0}(x^2+y^2+z^2\neq 0)$，则“$xyz=0$”是“点 $O$ 在△$ABC$ 的边所在直线上

的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．非充分也非必要条件

11．（2021秋•浦东新区期末13）已知直线 $a$ 在平面β上，则“直线 $l\perp a$”是“直线 $l\perp\beta$”

的（　　）条件．

A．充分非必要　　B．必要非充分

C．充要　　D．非充分非必要

12．（2021秋•闵行区期末16）设函数 $f(x)=2^x-2^{-x}+\frac{3}{|x|+1}$，$x\in\mathbf{R}$，对于实数 $a$、$b$，给

出以下命题：

命题 $p_1$：$a+b\geqslant 0$；

命题 $p_2$：$a-b^2\geqslant 0$；

命题 $q$：$f(a)+f(b)\geqslant 0$．

下列选项中正确的是（　　）

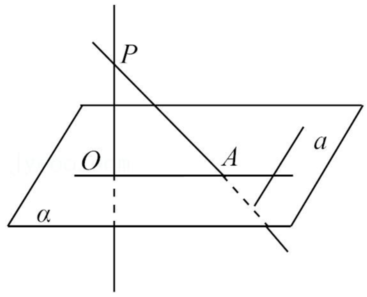
A．$p_1$、$p_2$中仅$p_1$是$q$的充分条件

B．$p_1$、$p_2$中仅$p_2$是$q$的充分条件

C．$p_1$、$p_2$都不是$q$的充分条件

D．$p_1$、$p_2$都是$q$的充分条件

13．（2021秋•松江区期末15）如图，已知点$A\in$平面$\alpha$，点$O\in\alpha$，直线$a\subset\alpha$，点$P\notin\alpha$且$PO\perp\alpha$，则“直线$a\perp$直线$OA$”是“直线$a\perp$直线$PA$”的（　　）




A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

**【考点4】解不等式**

**【知识精讲】**

**1. 分式不等式的解法**

定义：分母中含有未知数，且分子、分母都是关于$x$的多项式的不等式称为分式不等式.

解法：等价转化法解分式不等式

$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$，$\frac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)\cdot g(x)<0$.

**2.基本不等式(或)均值不等式：** $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

**基本不等式的变形与拓展**

(1)若$a,b\in R$,则$a^2+b^2\geq 2ab$；(2)若$a,b\in R$,则$ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$（当且仅当$a=b$时取“=”）.

(2)若 $a>0,b>0$,则 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$；(2)若 $a>0,b>0$,则 $a+b\ge 2\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 取"="）；

(3)若 $a>0,b>0$,则 $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$（当且仅当 $a=b$ 时取"="）．

3．若 $x>0$,则 $x+\frac{1}{x}\ge 2$（当且仅当 $x=1$ 时取"="）；若 $x<0$,则 $x+\frac{1}{x}\le -2$（当且仅当 $x=-1$ 时取"="）；若 $x\ne 0$,则 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\ge 2$,即 $x+\frac{1}{x}\ge 2$ 或 $x+\frac{1}{x}\le -2$（当且仅当 $a=b$ 时取"="）．

4．若 $ab>0$,则 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$（当且仅当 $a=b$ 时取"="）；若 $ab\ne 0$,则 $\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right|\ge 2$,即 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ 或 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\le -2$（当且仅当 $a=b$ 时取"="）．

5．一个重要的不等式链：$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$．

**【历年真题】**

**Round1:基础必过题**

1．（2021 秋•黄浦区期末 15）下列不等式中，与不等式 $\frac{x+8}{x^2+2x+3}<2$ 解集相同的是（　　）

A．$(x+8)(x^2+2x+3)<2$　　B．$x+8<2(x^2+2x+3)$

C．$\frac{1}{x^2+2x+3}<\frac{2}{x+8}$　　D．$\frac{x^2+2x+3}{x+8}>\frac{1}{2}$

2．（2021 秋•崇明区期末 14）不等式 $\frac{2-3x}{x-1}>0$ 的解集为（　　）

A．$(-\infty,\frac{3}{4})$　B．$(-\infty,\frac{2}{3})$　C．$(-\infty,\frac{2}{3})\bigcup(1,+\infty)$　D．$(\frac{2}{3},1)$

3．（2021 秋•闵行区期末 15）已知实数 $x_1$、$y_1$、$x_2$、$y_2$、$x_3$、$y_3$ 满足 $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2=2$，则 $x_1y_2$、$x_2y_3$、$x_3y_1$ 三个数中，大于 1 的个数最多是（　　）

A．0　B．1　C．2　D．3

4．（2021 秋•青浦区期末 2）不等式 $\frac{1}{x-1}<1$ 的解集是 ______．

5．（2021秋•普陀区期末2）不等式$\frac{1}{x+1}>1$的解集为 ________.

6．（2021秋•黄浦区期末2）不等式$|x-1|<1$的解集是 ______.

7．（2021秋•金山区期末8）已知$x>0$，$y>0$，且$\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=1$，则$4x+y$的最小值为 _______.

8．（2021秋•嘉定区期末7）已知实数$x$、$y$满足$x+2y=3$，则$2^x+4^y$的最小值为 ____.

9．（2021秋•松江区期末10）已知$a>0$，$b>0$，且$\frac{1}{a+2}+\frac{2}{b}=\frac{2}{3}$，则$2a+b$的最小值为 ______.

## Round2:能力提高题

10．（2021秋•嘉定区期末16）若存在实数$a$，使得当$x\in[0,m]$（$m>0$）时，都有$|2x-1|+|x^2-a|\leqslant 4$，则实数$m$的最大值为（　　）

A．1　　B．$\frac{3}{2}$　　C．2　　D．$\frac{5}{2}$

11．（2021秋•长宁区期末9）设$x$、$y\in\mathbf{R}$，$a>0$，$b>0$，若$a^x=b^y=3$，$a+2b=2\sqrt{6}$，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最大值为 ____.

# 专题 1 集合、命题与不等式

**【历年真题】**

**【考点 1】集合的关系及运算**

1．（2021 秋•静安区期末）设集合 $A=\{y|y=(\frac{1}{2})^{x}, x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{y|y=x^{\frac{1}{2}}, x\geqslant 0\}$，

则 $A\cap B=$__$\{y|y>0\}$__．

【考点】交集及其运算．

【专题】集合思想；定义法；集合；数学运算．

【分析】求出集合 $A$，集合 $B$，利用交集定义能求出 $A\cap B$．

【解答】解：∵集合 $A=\{y|y=(\frac{1}{2})^{x}, x\in\mathbf{R}\}=\{y|y>0\}$，

集合 $B=\{y|y=x^{\frac{1}{2}}, x\geqslant 0\}=\{y|y\geqslant 0\}$，

∴$A\cap B=\{y|y>0\}$．

故答案为：$\{y|y>0\}$．

【点评】本题考查集合的运算，考查交集定义、不等式的性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

2．（2021 秋•金山区期末）已知集合 $A=\{x|x>2\}$，$B=\{x|x<3\}$，则 $A\cap B=$__$\{x|2<x<3\}$__．

【考点】交集及其运算．

【专题】集合思想；定义法；集合；数学运算．

【分析】利用交集定义直接求解．

【解答】解：∵集合 $A=\{x|x>2\}$，$B=\{x|x<3\}$，

∴$A\cap B=\{x|2<x<3\}$．

故答案为：$\{x|2<x<3\}$．

【点评】本题考查集合的运算，考查交集定义、不等式性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

3．（2021 秋•徐汇区期末）已知集合 $M=\{x|x^2-2x>0\}$，$N=\{x||x|\leqslant 1\}$，则 $M\cup \mathbf{N}=$__$\{x|x$

$\leq 1$ 或 $x>2\}$ .

【考点】并集及其运算.

【专题】集合思想；定义法；集合；逻辑推理.

【分析】先利用一元二次不等式以及绝对值不等式的解法求出集合 $M$，$N$，然后由并集的定义求解即可.

【解答】解：因为集合 $M=\{x|x^2-2x>0\}=\{x|x<0$ 或 $x>2\}$，$N=\{x||x|\leq 1\}=\{x|-1\leq x\leq 1\}$，

则 $M\cup \mathbf{N}=\{x|x\leq 1$ 或 $x>2\}$.

故答案为：$\{x|x\leq 1$ 或 $x>2\}$.

【点评】本题考查了集合的运算，主要考查了集合并集定义的理解与应用，一元二次不等式以及绝对值不等式的解法，属于基础题.

4．（2021秋•奉贤区期末）已知集合 $A=\{1，2\}$，$B=\{2，a\}$，若 $A\cup B=\{1，2，3\}$，则 $a$

$=$ 3 .

【考点】并集及其运算.

【专题】集合思想；定义法；集合；数学运算.

【分析】利用集合并集的定义求解即可.

【解答】解：因为集合 $A=\{1，2\}$，$B=\{2，a\}$，$A\cup B=\{1，2，3\}$，

则 $a=3$.

故答案为：3.

【点评】本题考查了集合的运算，主要考查了集合并集定义的理解与应用，属于基础题.

5．（2021秋•青浦区期末）若全集 $U=\{1，2，3，4，5，6\}$，$M=\{1，3，4\}$，$N=\{2，3，4\}$，则集合$\complement_U$（$M\cap \mathbf{N}$）$=$ $\{1，2，5，6\}$ .

【考点】交、并、补集的混合运算.

【专题】集合思想；定义法；集合；数学运算.

【分析】利用补集与交集的定义求解即可.

【解答】解：因为全集 $U=\{1，2，3，4，5，6\}$，$M=\{1，3，4\}$，$N=\{2，3，4\}$，

所以 $M\cap \mathbf{N}=\{3，4\}$，

则集合$\complement_U$（$M\cap\mathbf{N}$）$=\{1，2，5，6\}$．

故答案为：$\{1，2，5，6\}$．

【点评】本题考查了集合的运算，主要考查了集合交集与补集定义的理解与应用，属于基础题．

5．（2021秋•黄浦区期末）设 $m\in\mathbf{R}$，已知集合 $A=\{1，3，m\}$，$B=\{3，4\}$，若 $A\cup B=\{1，2，3，4\}$，则 $m=$__2__．

【考点】并集及其运算．

【专题】整体思想；综合法；集合；数学运算．

【分析】结合集合的并集运算及集合元素的互异性即可求解．

【解答】解：因为 $A=\{1，3，m\}$，$B=\{3，4\}$，若 $A\cup B=\{1，2，3，4\}$，

所以 $m=2$．

故答案为：2．

【点评】本题主要考查了集合的并集运算，属于基础题．

6．（2021秋•杨浦区期末）已知集合 $A=\{1，2，3，4\}$，$B=\{x|x\leqslant\frac{5}{2}，x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$__$\{1，2\}$__．

【考点】交集及其运算．

【专题】集合思想；定义法；集合；数学运算．

【分析】利用交集定义直接求解．

【解答】解：∵集合 $A=\{1，2，3，4\}$，

$B=\{x|x\leqslant\frac{5}{2}，x\in\mathbf{R}\}$，

$\therefore A\cap B=\{1，2\}$．

故答案为：$\{1，2\}$．

【点评】本题考查集合的运算，考查交集定义、不等式性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

7．（2021秋•长宁区期末）已知集合 $A=\{x|x\leq 2\}$，$B=\{1，3，5，7\}$，则 $A\cap B=$__$\{1\}$__．

【考点】交集及其运算．

【专题】集合思想；定义法；集合；数学运算．

【分析】利用交集定义直接求解．

【解答】解：∵集合 $A=\{x|x\leq 2\}$，$B=\{1，3，5，7\}$，

∴$A\cap B=\{1\}$．

故答案为：$\{1\}$．

【点评】本题考查集合的运算，考查交集定义、不等式性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

8．（2021秋•浦东新区期末）已知集合 $A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|\frac{x}{x-2}<0\}$，则 $A\cap B=$__

（0，1）__．

【考点】交集及其运算．

【专题】集合思想；定义法；集合；数学运算．

【分析】求出集合 $A$，$B$，由此能求出 $A\cap B$．

【解答】解：∵集合 $A=\{x|-1<x<1\}$，

$B=\{x|\frac{x}{x-2}<0\}=\{x|0<x<2\}$，

∴$A\cap B=\{x|0<x<1\}=$（0，1）．

故答案为：（0，1）．

【点评】本题考查集合的运算，考查交集定义、不等式性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

9．（2021秋•闵行区期末）已知集合 $A=\{3，m\}$，$B=\{m，m+1\}$，若 $A\cap B=\{4\}$，则 $A\cup$

$B=$__$\{3，4，5\}$__．

【考点】并集及其运算；交集及其运算．

【专题】计算题；方程思想；综合法；集合；数学运算．

【分析】由 $A\cap B=\{4\}$，可得 $4\in A$，从而可求得 $m$ 的值，从而可求得集合 $A$，$B$，再由并集运算求解即可．

【解答】解：因为集合 $A=\{3，m\}$，$B=\{m，m+1\}$，若 $A\cap B=\{4\}$，

所以 $4\in A$，则 $m=4$，所以 $A=\{3，4\}$，$B=\{4，5\}$，

所以 $A\cup B=\{3，4，5\}$．

故答案为：$\{3，4，5\}$．

【点评】本题主要考查交集和并集的运算，考查运算求解能力，属于基础题．

10．（2021 秋•松江区期末）已知集合 $A=\{1，2，3，4，5\}$，$B=\{x|2x-6<0\}$，则 $A\cap B$ $=$__$\{1，2\}$__．

【考点】交集及其运算．

【专题】整体思想；综合法；集合；数学运算．

【分析】先求出集合 $B$，然后结合集合的交集运算即可求解．

【解答】解：$A=\{1，2，3，4，5\}$，$B=\{x|2x-6<0\}=\{x|x<3\}$，

则 $A\cap B=\{1，2\}$．

故答案为：$\{1，2\}$．

【点评】本题主要考查了集合交集运算，属于基础题．

11．（2021 秋•嘉定区期末）已知集合 $A=\{x|-1<x<3\}$，$B=\{0，2，4\}$，则 $A\cap B=$__$\{0，2\}$__．

【考点】交集及其运算．

【专题】整体思想；综合法；集合；数学运算．

【分析】由已知结合集合的交集运算定义即可求解．

【解答】解：因为 $A=\{x|-1<x<3\}$，$B=\{0，2，4\}$，

所以 $A\cap B=\{0，2\}$．

故答案为：$\{0，2\}$．

【点评】本题主要考查了集合的交集运算，属于基础题．

12．（2021秋•虹口区期末）已知集合 $A=\{1，2，4\}$，$B=\{y|y=\log_2x，x\in A\}$，则 $A\cup B=$__ $\underline{\{0，1，2，4\}}$__．

【考点】并集及其运算．

【专题】整体思想；综合法；集合；数学运算．

【分析】先求出集合 $B$，然后结合集合的并集运算即可求解．

【解答】解：因为 $A=\{1，2，4\}$，$B=\{y|y=\log_2x，x\in A\}=\{0，1，2\}$，

则 $A\cup B=\{0，1，2，4\}$．

故答案为：$\{0，1，2，4\}$．

【点评】本题主要考查了集合的并集运算，属于基础题．

13．（2021秋•普陀区期末）若集合 $\{a，2\}\cup\{3\}=\{2，3\}$，则实数 $a=$__ $\underline{3}$__．

【考点】并集及其运算．

【专题】对应思想；转化法；集合；数学运算．

【分析】根据集合的并集的定义求出 $a$ 的值即可．

【解答】解：若集合 $\{a，2\}\cup\{3\}=\{2，3\}$，

则 $a=3$，

故答案为：3．

【点评】本题考查了集合的并集的定义，是基础题．

14．（2021秋•上海期末）已知集合 $A=\{l，2\}$，$B=\{a，3\}$，若 $A\cap B=\{1\}$，则 $A\cup B=$__ $\underline{\{1，2，3\}}$__．

【考点】并集及其运算；交集及其运算．

【专题】计算题；集合思想；综合法；集合；数学运算．

【分析】由题意可得 $a=1$，再求 $A\cup B$ 即可．

【解答】解：$\because A=\{1，2\}$，$B=\{a，3\}$，$A\cap B=\{1\}$，

$\therefore a=1$，故 $A\cup B=\{1，2，3\}$，

故答案为：{1，2，3}．

【点评】本题考查了集合的运算，属于基础题．

15．（2021秋•宝山区期末）已知集合 $A=\{-1，0，1，2\}$，$B=\{x|0<x<3\}$，则 $A\cap B=$__

{1，2}__．

【考点】交集及其运算．

【专题】集合思想；定义法；集合；数学运算．

【分析】由已知直接利用交集运算得答案．

【解答】解：∵$A=\{-1，0，1，2\}$，$B=\{x|0<x<3\}$，

∴$A\cap B=\{1，2\}$，

故答案为：{1，2}．

【点评】本题考查交集及其运算，是基础题．

16．（2021秋•普陀区期末）设非空集合 $Q\subseteq M$，当 $Q$ 中所有元素和为偶数时（集合为单元素时和为元素本身），称 $Q$ 是 $M$ 的偶子集．若集合 $M=\{1，2，3，4，5，6，7\}$，则其偶子集 **Q** 的个数为 __63__．

【考点】子集与真子集．

【专题】计算题；分类讨论；分类法；集合；数学运算．

【分析】由偶子集的定义，需元素和为偶数，所以分类考虑即可．

【解答】解：对集合 $Q$ 中奇数和偶数的个数进行分类讨论，确定每种情况下集合 $Q$ 的个数，综合可得结果集合 $Q$ 中只有 2 个奇数时，则集合 $Q$ 的可能情况为：{1，3}、{1，5}、{1，7}、{3，5}、{3，7}，{5，7}，共 6 种．

若集合 $Q$ 中只有 4 个奇数时，则集合 $Q=\{1，3，5，7\}$，只有一种情况，

若集合 $Q$ 中只含 $l$ 个偶数，共 3 种情况；

若集合 $Q$ 中只含 2 个偶数，则集合 $Q$ 可能的情况为；{2，4}，{2，6}，{4，6}，共 3 种情况；

若集合 $Q$ 中只含 3 个偶数，则集合 $Q=\{2，4，6\}$，只有 1 种情况，

因为 $Q$ 是 $M$ 的偶子集，分以下几种情况讨论：

若集合 $Q$ 中的元素全为偶数，则满足条件的集合 $Q$ 的个数为 7；

若集合 $Q$ 中的元素全为奇数，则奇数的个数为偶数，共 7 种；

若集合 $Q$ 中的元素是 2 个奇数 1 个偶数，共 6×3＝18 种；

若集合 $Q$ 中的元素为 2 个奇数 2 个偶数，共 6×3＝18 种；

若集合 $Q$ 中的元素为 2 个奇数 3 个偶数，共 6×1＝6 种；

若集合 $Q$ 中的元素为 4 个奇数 $l$ 个偶数，共 1×3＝3 种；

若集合 $Q$ 中的元素为 4 个奇数 2 个偶数，共 1×3＝3 种；

若集合 $Q$ 中的元素为 4 个奇数 3 个偶数，共 1 种．

综上所述，满足条件的集合 $Q$ 的个数为 7+7+18+18+6+3+3+1＝63．

故答案为：63．

【点评】本题考查子集的个数，考查学生的推理能力，属于中档题．

**【知识精讲】**

**4．充分条件、必要条件与充要条件的概念**

（1）充分条件：若 $p\Rightarrow q$，则 $p$ 是 $q$ 充分条件.

（2）必要条件：若 $q\Rightarrow p$，则 $p$ 是 $q$ 必要条件.

（3）充要条件：若 $p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$，则 $p$ 是 $q$ 充要条件.

注：如果甲是乙的充分条件，则乙是甲的必要条件；反之亦然.

**【考点 2】命题**

**Round1:基础必过题**

1．（2021 秋•奉贤区期末）对于下列命题：①若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $\frac{a+c}{d}>\frac{b+d}{c}$；②若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $a^c>b^d$.关于上述命题描述正确的是（　　）

A．①和②均为真命题　　　　B．①和②均为假命题

C．①为真命题，②为假命题　　　　D．①为假命题，②为真命题

【考点】命题的真假判断与应用．

【专题】转化思想；转化法；不等式的解法及应用；数学运算．

【分析】对于①，结合不等式的性质，即可求解，对于②，结合特殊值法，即可求解．

【解答】解：对于①，∵$c>d>0$，∴$\frac{1}{cd}>0$，

∴$c\times\frac{1}{cd}>d\times\frac{1}{cd}>0>0$，即$\frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$，

∵$a>b>0$，$c>d>0$，∴$a+c>b+d>0$，

∴$\frac{a+c}{d}>\frac{b+d}{c}$，故①为真命题，

对于②，令$a=c=\frac{1}{2}$，$b=d=\frac{1}{4}$，满足$a>b>0$，$c>d>0$，但$a^c=b^d$，故②为假命题．

故选：$C$．

【点评】本题主要考查不等式的性质，以及特殊值法的应用，属于基础题．

## Round2:能力提高题

2．（2021秋•杨浦区期末）已知非空集合$A$，$B$满足：$A\cup B=R$，$A\cap B=\varnothing$，函数

$f(x)=\begin{cases}x^2,x\in A\\2x-1,x\in B\end{cases}$，对于下列两个命题：①存在唯一的非空集合对（$A$，$B$），使得$f$（$x$）为偶函数；②存在无穷多非空集合对（$A$，$B$），使得方程$f$（$x$）$=2$无解．下面判断正确的是（　　）

A．①正确，②错误　　　　B．①错误，②正确

C．①、②都正确　　　　D．①、②都错误

【考点】命题的真假判断与应用．

【专题】计算题；整体思想；综合法；简易逻辑；逻辑推理．

【分析】分析命题①．因为 $A\cup B=R$，$A\cap B=\varnothing$，则 $\begin{cases}0\in A\\0\notin B\end{cases}$，要么 $\begin{cases}0\in B\\0\notin A\end{cases}$，从反面寻找满足条件的集合对（$A$，$B$）可判断①；

解方程 $f(x)=2$，检验可判断②．

【解答】解：命题①．因为 $A\cup B=R$，$A\cap B=\varnothing$，

所以要么 $\begin{cases}0\in A\\0\notin B\end{cases}$，要么 $\begin{cases}0\in B\\0\notin A\end{cases}$

所以不存在非空集合对（$A$，$B$），使 $f(x)$ 为偶函数，则命题①错误．

假设存在某个非空集合对（$A$，$B$）满足 $\begin{cases}0\in A\\0\notin B\end{cases}$ 且为偶函数，

将元素 0 从集合 $A$ 中取出，放入集合 $B$，其它元素不变，得到一个新的非空集合对（$A_1$，$B_1$），

则新的非空集合对（$A_1$，$B_1$），使函数 $f(x)$ 仍然是偶函数．

假设某个非空集合对（$A$，$B$）满足 $\begin{cases}0\in B\\0\notin A\end{cases}$ 且 $f(x)$ 为偶函数，

将元素 0 从集合 $B$ 中取出，放入集合 $A$，其它元素不变，得到一个新的非空集合对（$A_2$，$B_2$），

则新的非空集合对（$A_2$，$B_2$），使函数 $f(x)$ 仍然是偶函数．

当存在非空集合对（$A$，$B$），使 $f(x)$ 为偶函数时，非空集合对（$A$，$B$）不唯一，

综上所述，命题①错误；

命题②，解方程 $x^2=2$，得 $x=\pm\sqrt{2}$，

解方程 $2x-1=2$，得 $x=\frac{3}{2}$，

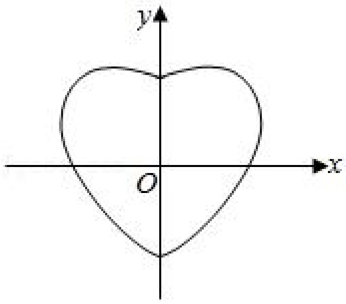
当非空集合对（$A$，$B$）满足 $\sqrt{2}\in A$，$(-\sqrt{2})\notin A$，$\frac{3}{2}\notin B$ 时，方程 $f(x)=2$ 无解，

而满足这个条件的非空集合对（$A$，$B$）有无穷多个，故命题②正确；

故选：$B$．

【点评】本题考查了命题的真假的判断，属于中档题．

3．（2021秋•崇明期末）数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线 $C$：$x^2+y^2=1+|x|y$ 就是其中之一（如图），给出下列两个命题：命题 $q_1$：曲线 $C$ 上任意一点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$；命题 $q_2$：曲线 $C$ 所围成的“心形”区域的面积小于3．则下列说法正确的是（　　）




A．命题 $q_1$ 是真命题，命题 $q_2$ 是假命题

B．命题 $q_1$ 是假命题，命题 $q_2$ 是真命题

C．命题 $q_1$，$q_2$ 都是真命题

D．命题 $q_1$，$q_2$ 都是假命题

【考点】命题的真假判断与应用；曲线与方程．

【专题】数形结合；数形结合法；简易逻辑；逻辑推理；数学运算；数据分析．

【分析】先判断出曲线 $C$ 关于 $y$ 轴对称，结合基本不等式和对称性可以得到曲线经过的6个整数点，再结合这6个点的坐标就可以判断出两个命题的真假，进而选出答案．

【解答】解：因为曲线 $C$：$x^2+y^2=1+|x|y$，用（$-x$，$y$）替换曲线中的（$x$，$y$），方程不变，所以曲线 $C$ 关于 $y$ 轴对称，当 $x\geqslant0$ 时，$C$：$x^2+y^2=1+xy$，

所以 $x^2+y^2=1+xy\leqslant1+\dfrac{x^2+y^2}{2}$，可得 $x^2+y^2\leqslant2$，

所以曲线经过点（0，1），（0，$-1$），（1，0）（1，1）再根据对称性可知，曲线还经过点（$-1$，0），（$-1$，1）；

对于 $q_1$，当 $x\geqslant0$ 时，$x^2+y^2\leqslant2$，即曲线 $C$ 右侧部分的点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$，再根据对称性可知，曲线 $C$ 上的所有点到原点的距离都不超过 $\sqrt{2}$，故 $q_1$ 正确；

对于 $q_2$，因为在 $x$ 轴上方，图形面积大于四点（$-1$，0），（1，0），（1，1），（$-1$，1）围成的矩形面积 $1\times2=2$，在 $x$ 轴下方，图形面积大于三点

（－1，0），（1，0），（0，－1）围成的等腰直角三角形的面积$\frac{1}{2}\times2\times1=1$，所以曲线 $C$ 所围成的“心形”区域的面积的面积大于 3，故 $q_2$ 错误．

故选：$A$．

【点评】对命题 $q_1$ 的判断关键是找出图象上的点（$x$，$y$）满足 $x^2+y^2\leqslant2$，对 $q_2$ 的判断关键是观察出面积大于四点（－1，0），（1，0），（1，1），（－1，1）围成的矩形面积和大于三点（－1，0），（1，0），（0，－1）围成的等腰直角三角形的面积，属于中档题．

4．（2021 秋•徐汇区期末 15）已知曲线 $C$：$\frac{x|x|}{4}+\frac{y|y|}{3}=-1$，对于命题：①垂直于 $x$ 轴的直线与曲线 $C$ 有且只有一个交点；②若 $P_1$（$x_1$，$y_1$），$P_2$（$x_2$，$y_2$）为曲线 $C$ 上任意两点，则有 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}<0$．下列判断正确的是（　　）

A．①和②均为真命题　　B．①和②均为假命题

C．①为真命题，②为假命题　　D．①为假命题，②为真命题

【考点】曲线与方程；命题的真假判断与应用．

【专题】计算题；方程思想；转化思想；综合法；圆锥曲线的定义、性质与方程；数学运算．

【分析】根据题意，分情况讨论曲线 $C$ 的情形，作出曲线的大致图形，分析两个命题的真假可得答案．

【解答】解：根据题意，当 $x\geqslant0$ 且 $y\geqslant0$ 时，曲线 $C$ 为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=-1$，不表示任何图形，

当 $x<0$，$y\geqslant0$ 时，曲线 $C$ 为 $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=-1$，即$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$，为双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 在第二象限的部分，

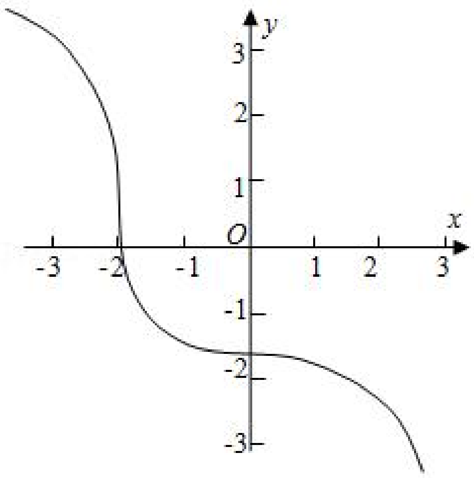
当 $x<0$，$y<0$ 时，曲线 $C$ 为 $-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=-1$，即$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 在第三象限的部分，

当 $x\geqslant0$，$y<0$ 时，曲线 $C$ 为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=-1$，即$\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{4}=1$，为双曲线$\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{4}=1$ 在第四象限的部分，

其大致图形如图：由曲线的图形，①为真命题，

曲线上任意两点 $P_1$（$x_1$，$y_1$），$P_2$（$x_2$，$y_2$）的连线的斜率为负，即有$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}<0$，②为真命题，

故选：$A$．




【点评】本题考查曲线和方程的应用，涉及命题真假的判断，属于中档题．

**【考点 3】充要条件**

1．（2021 秋•金山区期末）已知 $a$、$b\in\mathbf{R}$，则“$\frac{b}{a}>1$”是“$b>a$”的（　　）条件

A．充分非必要　　B．必要非充分

C．充要　　D．非充分非必要

【考点】充分条件与必要条件．

【专题】分类讨论；综合法；简易逻辑；数学运算．

【分析】因为$\frac{b}{a}>1$可化为：$\frac{b-a}{a}>0$，然后分别对 $a>0$，$a<0$ 讨论得出 $b$ 与 $a$ 的关系，进而可以求解．

【解答】解：因为$\frac{b}{a}>1$可化为：$\frac{b-a}{a}>0$，

当 $a>0$ 时，$b-a>0$，即 $b>a$；

当 $a<0$ 时，$b-a<0$，即 $b<a$，

所以$\frac{b}{a}>1$与 $b>a$ 没有关系，

故选：$D$．

【点评】本题考查了四个条件的关系的应用，考查了学生的分析问题的能力，属于基础题．

2．（2021 秋•徐汇区期末）已知 $a$，$b\in\mathbf{R}$ 且 $a\cdot b\neq 0$，则“$a<b$”是“$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$”的（　　）

A．充分非必要条件　　　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　　　D．既非充分又非必要条件

【考点】充分条件与必要条件．

【专题】转化思想；转化法；简易逻辑；数学运算．

【分析】根据充分必要条件的定义以及不等式的性质判断即可．

【解答】解：由 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 得：$\frac{a-b}{ab}<0$，

则 $0<a<b$ 或 $a<b<0$ 或 $a>0>b$，

故“$a<b$”是“$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$”的既非充分又非必要条件，

故选：$D$．

【点评】本题考查了充分必要条件，考查不等式问题，是基础题．

3．（2021 秋•青浦区期末）已知公差为 $d$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$，则“$S_n-na_n<0$，对 $n>1$，$n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立”是“$d>0$”的（　　）

A．充分非必要条件　　　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　　　D．非充分也非必要条件

【考点】等差数列的前 n 项和；充分条件与必要条件；等差数列的性质．

【专题】转化思想；转化法；等差数列与等比数列；数学运算．

【分析】将 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，$a_n=a_1+(n-1)d$ 代入 $S_n-na_n<0$，并化简，再结合 $n$ 的取值范围，即可求解．

【解答】解：$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，$a_n=a_1+(n-1)d$，

则 $S_n-na_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d-na_1-n(n-1)d=-\frac{n(n-1)}{2}d$，

则“$S_n-na_n<0$，对 $n>1$，$n\in\mathbf{N}^*$恒成立”，故 $d>0$，

若 $d>0$，则 $S_n-na_n=-\frac{n(n-1)}{2}d<0$，对 $n>1$，$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，

故“$S_n-na_n<0$，对 $n>1$，$n\in\mathbf{N}^*$恒成立”是“$d>0$”的充分必要条件．

故选：$C$．

【点评】本题主要考查等差数列前 $n$ 项和公式的应用，考查计算能力，属于基础题．

4．（2021 秋•黄浦区期末）若 $z_1$、$z_2\in\mathbf{C}$，则“$z_1$、$z_2$ 均为实数”是“$z_1-z_2$ 是实数”的（　　）条件

A．充分非必要　　　　B．必要非充分

C．充要　　　　D．非充分非必要

【考点】充分条件与必要条件．

【专题】综合题；转化思想；综合法；简易逻辑；逻辑推理；数学运算．

【分析】根据复数运算即可解决此题．

【解答】解：∵两个实数的差一定是实数，∴若 $z_1$、$z_2$ 均为实数，那么 $z_1-z_2$ 一定是实数；

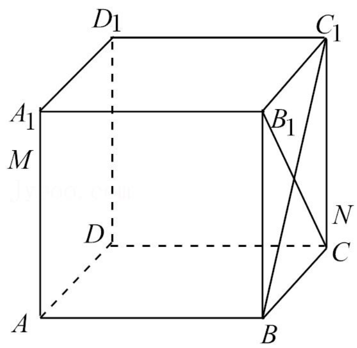
若 $z_1-z_2$ 是实数，$z_1$、$z_2$ 不一定均为实数，例如 $z_1=1+i$、$z_2=2+i$．

∴“$z_1$、$z_2$ 均为实数”是“$z_1-z_2$ 是实数”的充分不必要条件．

故选：$A$．

【点评】本题考查复数运算及充分、必要条件判定，考查数学运算能力及推理能力，属于基础题．

5．（2021 秋•杨浦区期末）如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 $M$、$N$ 分别在棱 $AA_1$、$CC_1$ 上，则“直线 $MN\perp$直线 $C_1B$”是“直线 $MN\perp$平面 $C_1BD$”的（　　）




A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

【考点】直线与平面垂直．

【专题】对应思想；综合法；空间位置关系与距离；逻辑推理．

【分析】由三垂线定理可推出 $MN\perp BD$，再由线面垂直的判定定理，可证充分条件；由线面垂直的性质定理课证必要条件．

【解答】解：充分条件：

因为 $MN$ 在面 $ABCD$ 上的投影为 $AC$，且 $AC\perp BD$，

所以 $MN\perp BD$，

又 $MN\perp C_1B$，$C_1B\cap BD=B$，$C_1B$、$BD\subset$平面 $C_1BD$，

所以 $MN\perp$平面 $C_1BD$，

必要条件：

由线面垂直的性质定理知，若直线 $MN\perp$平面 $C_1BD$，因为 $C_1B\subset$平面 $C_1BD$，所以 $MN\perp C_1B$，

所以“直线 $MN\perp$直线 $C_1B$”是“直线 $MN\perp$平面 $C_1BD$”的充要条件．

故选：$C$．

【点评】本题考查空间中线与面的位置关系，熟练掌握线面垂直的判定定理和性质定理是解题的关键，考查空间立体感和推理论证能力，属于基础题．

6．（2021 秋•长宁区期末）“$\frac{1}{x}<1$”是“$x>1$”的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．非充分也非必要条件

【考点】充分条件与必要条件．

【专题】整体思想；综合法；简易逻辑；数学运算．

【分析】由$\frac{1}{x}<1$解得：$x>1$或$x<0$，所以$\{x|x>1\}\subsetneqq\{x|x>1$或$x<0\}$，进而可以得出结论．

【解答】解：由$\frac{1}{x}<1$解得：$x>1$或$x<0$，

所以$\{x|x>1\}\subsetneqq\{x|x>1$或$x<0\}$，

所以“$\frac{1}{x}<1$”是“$x>1$”的必要不充分条件，

故选：$B$．

【点评】本题考查了四个条件的应用，涉及到解不等式问题，属于基础题．

7．（2021秋•嘉定区期末）已知$x\in\mathbf{R}$，则“$|x|>1$”是“$x>1$”的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分又非必要条件

【考点】充分条件与必要条件．

【专题】综合题；转化思想；综合法；简易逻辑；直观想象；数学运算．

【分析】$|x|>1\Leftrightarrow x<-1$或$x>1$可解决此题．

【解答】解：$\because|x|>1\Leftrightarrow x<-1$或$x>1$，$\therefore$“$|x|>1$”是“$x>1$”的必要不充分条件．

故选：$B$．

【点评】本题考查充分、必要条件的判断，考查数学运算能力及直观想象能力，属于基础题．

8．（2021秋•虹口区期末）设α：实数$x$满足$\frac{x-3}{x+1}<0$，β：实数$x$满足$|x-1|<2$，那么α是β的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分又非必要条件

【考点】充分条件与必要条件．

【专题】整体思想；综合法；不等式的解法及应用；逻辑推理．

【分析】分别解分式不等式及绝对值不等式求出α，β，然后结合充分必要条件与集合之间的包含关系进行转化可求．

【解答】解；由 $\frac{x-3}{x+1}<0$ 得（$x$﹣3）（$x$+1）＜0，

解得﹣1＜$x$＜3，即α：$A$＝（﹣1，3），

由$|x-1|$＜2，得﹣1＜$x$＜3，即β：$B$＝（﹣1，3），

因为 $A$＝$B$，所以α是β的充要条件．

故选：$C$．

【点评】本题主要考查了充分必要条件的判断，还考查了分式不等式及绝对值不等式的求解，属于基础题．

8．（2021 秋•普陀区期末）设 $a$，$m$ 是实数，则“$m$＝5”是“$m$ 为 $a$ 和 10﹣$a$ 的等差中项”的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分也非必要条件

【考点】充分条件与必要条件；等差数列的性质．

【专题】对应思想；转化法；简易逻辑；数学运算．

【分析】根据充分必要条件以及等差中项的定义判断即可．

【解答】解：$a$ 和 10﹣$a$ 的等差中项是 $\frac{a+10-a}{2}=5$，

故“$m$＝5”是“$m$ 为 $a$ 和 10﹣$a$ 的等差中项”的充要条件，

故选：$C$．

【点评】本题考查了充分必要条件，考查等差中项问题，是基础题．

9．（2021 秋•宝山区期末）“$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$”是“直线 $a_1x+b_1y$＝1 和 $a_2x+b_2y$＝1 平行”的

（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．非充分又非必要条件

【考点】矩阵．

【专题】计算题；转化思想；分析法；矩阵和变换；数学运算．

【分析】由当 $a_1=a_2=0$，$b_1=b_2=1$，满足 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，但两直线重合，故 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 是直线 $a_1x+b_1y=1$ 和 $a_2x+b_2y=1$ 平行的非充分条件；分斜率是否存在讨论两直平行可得 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，故是必要条件，可得结论．

【解答】解：由 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，得 $a_1b_2-a_2b_1=0$，当 $a_1=a_2=0$，$b_1=b_2=1$ 时，直线 $a_1x+b_1y=1$ 和 $a_2x+b_2y=1$ 重合，故 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 是直线 $a_1x+b_1y=1$ 和 $a_2x+b_2y=1$ 平行的非充分条件，

若直线直线 $a_1x+b_1y=1$ 和 $a_2x+b_2y=1$，当直线斜率存在时可得 $-\dfrac{a_1}{b_1}=-\dfrac{a_2}{b_2}$，所以可得 $a_1b_2-a_2b_1=0$，即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，

若直线斜率不存在时，则有 $b_1=b_2=0$，此时有 $a_1b_2-a_2b_1=0$，即 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，

所以 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 是直线 $a_1x+b_1y=1$ 和 $a_2x+b_2y=1$ 平行的必要条件．

故选：$B$．

【点评】本题考查行列式的计算与两直线平行的条件，属基础题．

## Round2:能力提高题

10．（2021 秋•上海期末）设 $O$ 为△$ABC$ 所在平面上一点．若实数 $x$、$y$、$z$ 满足 $x$

$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\vec{0}(x^2+y^2+z^2\neq 0)$，则“$xyz=0$”是“点 $O$ 在△$ABC$ 的边所在直线上

的（　　）

A．充分非必要条件

B．必要非充分条件

C．充要条件

D．非充分也非必要条件

【考点】充分条件与必要条件．

【专题】计算题；转化思想；转化法；简易逻辑；逻辑推理．

【分析】先由 $xyz=0$ 得 $x$、$y$、$z$ 中只能有一个为 0，假设 $x=0$，可得 $O$ 只能在△$ABC$ 边 $BC$ 上，满足充分性；点 $O$ 在△$ABC$ 的边所在直线上，假设在边 $AB$ 上，可得 $z=0$，满足必要性，则可得答案．

【解答】解：∵$O$ 为△$ABC$ 所在平面内一点．实数 $x$、$y$、$z$ 满足 $x\,x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\vec{0}(x^2+y^2+z^2\neq0)$，

$\therefore x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=-z\overrightarrow{OC}$，

若 $xyz=0$”则 $x$、$y$、$z$ 中只能有一个为 0，（否则若 $x=y=0$，可推出 $z=0$，这与 $x^2+y^2+z^2\neq0$ 矛盾），

假设 $x=0$（$y$、$z$ 不为 0），可得 $y\overrightarrow{OB}=-z\overrightarrow{OC}$，∴ $\overrightarrow{OB}=-\frac{z}{y}\overrightarrow{OC}$，

∴向量 $\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 共线，∴$O$ 只能在△$ABC$ 边 $BC$ 上；

若点 $O$ 在△$ABC$ 的边所在直线上，假设在边 $AB$ 上，说明向量 $\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OA}$ 共线，

∴$z=0$，∴$xyz=0$，

∴“$xyz=0$”是“点 $O$ 在△$ABC$ 的边所在直线上”的充要条件．

故选：$C$．

【点评】本题以三角形和平面的向量为载体，考查了必要条件和充分条件的定义及其判断，属于中档题．

11．（2021 秋•浦东新区期末）已知直线 $a$ 在平面β上，则“直线 $l\perp a$”是“直线 $l\perp\beta$”

的（　　）条件．

A．充分非必要

B．必要非充分

C．充要

D．非充分非必要

【考点】直线与平面垂直．

【专题】转化思想；综合法；空间位置关系与距离；逻辑推理．

【分析】“直线 $l\perp a$”成立时，“直线 $l\perp\beta$”不一定成立；“直线 $l\perp\beta$”⇒“直线 $l\perp a$”，由此能求出结果．

【解答】解：直线 $a$ 在平面β上，

则"直线 $l\perp a$"成立时，"直线 $l\perp\beta$"不一定成立；

"直线 $l\perp\beta$" ⇒ "直线 $l\perp a$"，

∴直线 $a$ 在平面β上，则"直线 $l\perp a$"是"直线 $l\perp\beta$"的必要非充分条件．

故选：$B$．

【点评】本题考查充分条件、必要条件的判断，考查空间中线与面的位置关系等基础知识，考查空间立体感和推理论证能力，属于中档题．

12．（2021秋•闵行区期末）设函数 $f(x)=2^{x}-2^{-x}+\dfrac{3}{|x|+1}$，$x\in\mathbf{R}$，对于实数 $a$、$b$，给出以下命题：

命题 $p_1$：$a+b\geqslant 0$；

命题 $p_2$：$a-b^2\geqslant 0$；

命题 $q$：$f(a)+f(b)\geqslant 0$．

下列选项中正确的是（　　）

A．$p_1$、$p_2$ 中仅 $p_1$ 是 $q$ 的充分条件

B．$p_1$、$p_2$ 中仅 $p_2$ 是 $q$ 的充分条件

C．$p_1$、$p_2$ 都不是 $q$ 的充分条件

D．$p_1$、$p_2$ 都是 $q$ 的充分条件

【考点】充分条件与必要条件；命题的真假判断与应用．

【专题】函数思想；综合法；函数的性质及应用；逻辑推理；直观想象；数学运算．

【分析】令 $f(x)=g(x)+h(x)$，$g(x)=2^x-2^{-x}$，$h(x)=\dfrac{3}{|x|+1},x\in R$，$g(x)$ 是奇函数，在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$h(x)$ 是偶函数，在 $(-\infty,0)$ 单调增，在 $(0,+\infty)$ 单调减，且 $h(x)>0$，根据这些信息即可判断．

【解答】解：令 $f(x)=g(x)+h(x)$，$g(x)=2^{x}-2^{-x}$，$h(x)=\dfrac{3}{|x|+1},x\in R$，$g(x)$ 是奇函数，在 **R** 上单调递增，$h(x)$ 是偶函数，在（$-\infty$，0）单调增，在（0，$+\infty$）单调减，且 $h(x)>0$，$f(a)+f(b)\geqslant 0\Rightarrow f(a)\geqslant -f(b)$，

即 $g(a)+h(a)\geqslant -g(b)-h(b)$，

即 $g(a)+h(a)\geqslant g(-b)+[-h(b)]$，

①当 $a+b\geqslant 0$ 时，$a\geqslant -b$，故 $g(a)\geqslant g(-b)$，又 $h(x)>0$，故 $h(a)>-h(b)$，

∴此时 $f(a)+f(b)\geqslant 0$，

可得 $p_1$ 是 $q$ 的充分条件；

②当 $a-b^2\geqslant 0$ 时，则有：

$a\geqslant 0$，$-\sqrt{a}\bullet b\bullet\sqrt{a}$，$-\sqrt{a}\bullet -b\bullet\sqrt{a}$，

（$i$）当 $a\geqslant 1$ 时，$a\geqslant\sqrt{a}$，则 $-b\leqslant a$，故 $g(a)\geqslant g(-b)$；

此时，$h(a)>0$，$-h(b)<0$，∴$h(a)>-h(b)$，∴$f(a)+f(b)\geqslant 0$ 成立；

（$ii$）当 $a=0$ 时，$b=0$，$f(0)+f(0)=6\geqslant 0$ 成立，即 $f(a)+f(b)\geqslant 0$ 成立；

（$iii$）∵$g(x)$ 在 **R** 上单调递增，$h(x)$ 在（$-\infty$，0）单调递增，

∴$f(x)=g(x)+h(x)$ 在（$-\infty$，0）单调递增，

∵$f(-1)=0$，∴$f(x)>0$ 在（$-1$，0）上恒成立；

又∵$x\geqslant 0$ 时，$g(x)\geqslant 0$，$h(x)>0$，∴$f(x)>0$ 在[0，$+\infty$）上恒成立，

∴$f(x)>0$ 在（$-1$，$+\infty$）恒成立，

故当 $0<a<1$ 时，$a<\sqrt{a}<1$，$-1<-\sqrt{a}\bullet b\bullet\sqrt{a}<1$，

∴$f(a)>0$，$f(b)>0$，∴$f(a)+f(b)\geqslant 0$ 成立．

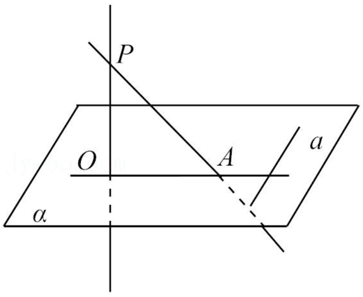
综上所述，$a-b^2\geqslant 0$ 时，均有 $f(a)+f(b)\geqslant 0$ 成立，

∴$p_2$ 是 $q$ 的充分条件．

故选：$D$．

【点评】本题的关键是将函数 $f$（$x$）拆成一个奇函数和一个函数值始终为正数的偶函数之和，考查对函数基本性质的掌握与熟练运用．

13．（2021 秋•松江区期末）如图，已知点 $A\in$平面α，点 $O\in\alpha$，直线 $a\subset\alpha$，点 $P\notin\alpha$且 $PO\perp\alpha$，则“直线 $a\perp$直线 $OA$”是“直线 $a\perp$直线 $PA$”的（　　）




A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

【考点】直线与平面垂直；充分条件与必要条件．

【专题】转化思想；综合法；空间位置关系与距离；简易逻辑；逻辑推理；直观想象；数学运算．

【分析】利用直线与平面垂直的判断定理，推出结果，即可判断选项．

【解答】解：已知点 $A\in$平面α，点 $O\in\alpha$，直线 $a\subset\alpha$，点 $P\notin\alpha$且 $PO\perp\alpha$，直线 $a\perp$直线 $OA$，$PO\cap OA=O$，可知直线 $a\perp$平面 $POA$，$PO\subset$平面 $POA$，所以直线 $a\perp$直线 $PA$；直线 $a\perp$直线 $PA$，$PA\cap OA=A$，可知直线 $a\perp$平面 $POA$，$OA\subset$平面 $POA$，所以直线 $a\perp$直线 $OA$，

所以“直线 $a\perp$直线 $OA$”是“直线 $a\perp$直线 $PA$”的充要条件．

故选：$C$．

【点评】本题考查直线与平面的位置关系的判断，三垂线定理与逆定理的应用，充要条件的判断，是中档题．

**【考点 4】解不等式**

**Round2:基础必过题**

1．（2021 秋•黄浦区期末）下列不等式中，与不等式 $\frac{x+8}{x^2+2x+3}<2$ 解集相同的是（　　）

A．（$x$+8）（$x^2$+2$x$+3）＜2　　　　B．$x$+8＜2（$x^2$+2$x$+3）

C．$\frac{1}{x^2+2x+3}<\frac{2}{x+8}$　　　　D．$\frac{x^2+2x+3}{x+8}>\frac{1}{2}$

【考点】其他不等式的解法．

【专题】不等式的解法及应用．

【分析】根据 $x^2+2x+3$＝（$x+1$）$^2+2$＞0，可得不等式 $\frac{x+8}{x^2+2x+3}<2$，等价于 $x+8$＜2（$x^2+2x+3$），从而得出结论．

【解答】解：由于 $x^2+2x+3$＝（$x+1$）$^2+2$＞0，不等式 $\frac{x+8}{x^2+2x+3}<2$，等价于 $x+8$＜2（$x^2+2x+3$），

故选：$B$．

【点评】本题主要考查不等式的基本性质的应用，体现了等价转化的数学思想，属于基础题．

2．（2021 秋•崇明期末）不等式 $\frac{2-3x}{x-1}>0$ 的解集为（　　）

A．$(-\infty,\frac{3}{4})$　B．$(-\infty,\frac{2}{3})$　C．$(-\infty,\frac{2}{3})\bigcup(1,+\infty)$　D．$(\frac{2}{3},1)$

【考点】其他不等式的解法．

【专题】计算题；方程思想；不等式的解法及应用．

【分析】转化分式不等式为二次不等式求解即可．

【解答】解：不等式 $\frac{2-3x}{x-1}>0$ 的解集就是（$x-1$）（$3x-2$）＜0，

解得 $\frac{2}{3}<x<1$．故选：$D$．

【点评】本题考查分式不等式的解法，考查转化思想的应用，也可以利用特殊值验证法判断．

3．（2021 秋•闵行区期末）已知实数 $x_1$、$y_1$、$x_2$、$y_2$、$x_3$、$y_3$ 满足 $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2=2$，则 $x_1y_2$、$x_2y_3$、$x_3y_1$ 三个数中，大于 1 的个数最多是（　　）

A．0　B．1　C．2　D．3

【考点】进行简单的合情推理；演绎推理．

【专题】计算题；方程思想；转化思想；综合法；等差数列与等比数列；数学运算．

【分析】根据题意，分析可得 $x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+x_3^2+y_3^2=x_1^2+y_2^2+x_2^2+y_3^2+x_3^2+y_1^2=6$，由基本不等式的性质变形分析可得 $x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1\leqslant 3$，由此分析可得三个数不能都大于 1，举出例子可得可以有 2 个数大于 1，即可得答案．

【解答】解：根据题意，$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2=2$，

则有 $x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+x_3^2+y_3^2=x_1^2+y_2^2+x_2^2+y_3^2+x_3^2+y_1^2=6$，

又由 $x_1^2+y_2^2\geqslant 2x_1y_2$，$x_2^2+y_3^2\geqslant 2x_2y_3$，$x_3^2+y_1^2\geqslant 2x_3y_1$，

则有 $2(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1)\leqslant 6$，即 $x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1\leqslant 3$，当且仅当 $x_1=y_1=x_2=y_2=x_3=y_3=1$ 时等号成立，

故 $x_1y_2$、$x_2y_3$、$x_3y_1$ 三个数中，不能三个都大于 1，

当 $x_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_2=1$，$y_2=1$，$x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y_3=\frac{\sqrt{6}}{2}$时，$x_1y_2$、$x_2y_3$、$x_3y_1$ 三个数中，有 2 个大于 1，

故三个数中，最多有 2 个大于 1，

故选：$C$．

【点评】本题考查合情推理的应用，涉及不等式的性质以及应用，属于基础题，

4．（2021 秋•青浦区期末）不等式 $\frac{1}{x-1}<1$ 的解集是 ＿（﹣∞，1）∪（2，+∞）＿．

【考点】其他不等式的解法．

【专题】计算题；不等式的解法及应用．

【分析】运用移项、通分和符号法，转化为一次不等式组，分别解出它们，再求并集即可．

【解答】解：不等式 $\frac{1}{x-1}<1$ 即为

$\frac{1}{x-1}-1<0$，即 $\frac{2-x}{x-1}<0$，

即有 $\begin{cases}2-x>0\\x-1<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2-x<0\\x-1>0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}x<2\\x<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>2\\x>1\end{cases}$，即 $x<1$ 或 $x>2$．

则解集为（﹣∞，1）∪（2，+∞）．

故答案为：（﹣∞，1）∪（2，+∞）．

【点评】本题考查分式不等式的解法，考查转化思想的运用，考查运算能力，属于基础题和易错题．

5．（2021秋•普陀区期末）不等式$\frac{1}{x+1}>1$的解集为 ___（﹣1，0）___．

【考点】其他不等式的解法．

【专题】对应思想；转化法；不等式的解法及应用；数学运算．

【分析】解分式不等式，求出不等式的解集即可．

【解答】解：∵$\frac{1}{x+1}>1$，∴$\frac{1}{x+1}-1>0$，

∴$\frac{1}{x+1}-\frac{x+1}{x+1}>0$，∴$\frac{-x}{x+1}>0$，

∴$\frac{x}{x+1}<0$，∴﹣1＜$x$＜0，

故不等式的解集是（﹣1，0），

故答案为：（﹣1，0）．

【点评】本题考查了分式不等式的解法，是基础题．

6．（2021秋•黄浦区期末2）不等式$|x-1|<1$的解集是 ______．

【考点】绝对值不等式的解法．

【专题】计算题．

【分析】先去掉绝对值然后再根据绝对值不等式的解法进行求解．

【解答】解：∵$|x-1|<1$，

∴$-1<x-1<1\Rightarrow 0<x<2$．

故答案为：（0，2）．

【点评】此题考查绝对值不等式的解法，解题的关键是去掉绝对值，此类题目是高考常见的题型，此题是一道基础题．

7．（2021 秋•金山区期末）已知 $x>0$，$y>0$，且 $\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=1$，则 $4x+y$ 的最小值为 __25__．

【考点】基本不等式及其应用．

【专题】计算题；转化思想；综合法；不等式；数学运算．

【分析】$4x+y=(\frac{4}{x}+\frac{1}{y})(4x+y)=\frac{4y}{x}+\frac{4x}{y}+17$，然后利用基本不等式可解决此题．

【解答】解：$\because x>0$，$y>0$，且 $\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=1$，

$$\therefore 4x+y=(\frac{4}{x}+\frac{1}{y})(4x+y)=\frac{4y}{x}+\frac{4x}{y}+17\geq 2\sqrt{\frac{4y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}+17=25$$

当且仅当 $\begin{cases}\frac{4y}{x}=\frac{4x}{y}\\ \frac{4}{x}+\frac{1}{y}=1\end{cases}$ 即 $x=y=5$ 时等号成立，$\therefore 4x+y$ 的最小值为 25．

故答案为：25．

【点评】本题考查基本不等式应用，考查数学运算能力，属于基础题．

8．（2021 秋•嘉定区期末）已知实数 $x$、$y$ 满足 $x+2y=3$，则 $2^x+4^y$ 的最小值为 __$4\sqrt{2}$__．

【考点】基本不等式及其应用．

【专题】整体思想；综合法；不等式的解法及应用；数学运算．

【分析】由已知结合基本不等式及指数的运算性质即可求解．

【解答】解：因为 $x+2y=3$，

则 $2^x+4^y\geq 2\sqrt{2^x\cdot 4^y}=2\sqrt{2^{x+2y}}=2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$，

当且仅当 $x=2y$ 且 $x+2y=3$，即 $x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{3}{4}$ 时取等号，此时 $2^x+4^y$ 最小值为 $4\sqrt{2}$．

故答案为：$4\sqrt{2}$

【点评】本题主要考查了基本不等式在求解最值中的应用，还考查了指数的运算性质，属于基础题．

9．（2021 秋•松江区期末）已知 $a>0$，$b>0$，且 $\frac{1}{a+2}+\frac{2}{b}=\frac{2}{3}$，则 $2a+b$ 的最小值为 __8__．

【考点】基本不等式及其应用.

【专题】整体思想；综合法；不等式的解法及应用；数学运算.

【分析】$2a+b=2a+4+b-4=\frac{3}{2}$（$2a+4+b$）（$\frac{1}{a+2}+\frac{2}{b}$）$-4$，展开后利用基本不等式即可求解.

【解答】解：因为 $a>0$，$b>0$，且 $\frac{1}{a+2}+\frac{2}{b}=\frac{2}{3}$，

则 $2a+b=2a+4+b-4=\frac{3}{2}$（$2a+4+b$）（$\frac{1}{a+2}+\frac{2}{b}$）$-4=\frac{3}{2}$（$4+\frac{1}{a+2}+\frac{4(a+2)}{b}$）$-4\geq\frac{3}{2}(4+2\sqrt{\frac{b}{a+2}\cdot\frac{4a+b}{b}})-4=8$，

当且仅当 $\frac{b}{a+2}=\frac{4a+8}{b}$ 且 $\frac{1}{a+2}+\frac{2}{b}=\frac{2}{3}$，即 $a=1$，$b=6$ 时取等号，此时 $2a+b$ 取得最小值 8.

故答案为：8.

【点评】本题主要考查了利用基本不等式求解最值，解题的关键是利用乘 1 法配凑基本不等式的应用条件，属于基础题.

## Round2:能力提高题

10．（2021 秋•嘉定区期末）若存在实数 $a$，使得当 $x\in[0，m]$（$m>0$）时，都有$|2x-1|+|x^2-a|\leq4$，则实数 $m$ 的最大值为（　　）

A．1　　B．$\frac{3}{2}$　　C．2　　D．$\frac{5}{2}$

【考点】不等式恒成立的问题；函数的最值及其几何意义.

【专题】分类讨论；定义法；不等式的解法及应用；逻辑推理.

【分析】从 $m$ 最大值选项开始代入验证，即可得出答案.

【解答】解：存在实数 $a$，使得当 $x\in[0，m]$（$m>0$）时，都有$|2x-1|+|x^2-a|\leq4$，

当 $x=0$ 时，$1+|a|\leq4$，所以$|a|\leq3$，解得 $-3\leq a\leq3$，

令 $x^2=a$，则$|2x-1|$的值最大为 4，所以 $2m-1=4$ 时，$m$ 最大，最大 $m=\frac{5}{2}$，

此时 $a=x^2=m^2=(\frac{5}{2})^2>3$，所以 $m=\frac{5}{2}$ 不成立，即选项 $D$ 不正确；

当 $m=2$ 时，不等式为 $|4-1|+|4-a|=3+|4-a|\leqslant 4$，

当 $a=3$ 时不等式恒成立，所以选项 $C$ 正确，

综上，实数 $m$ 的最大值为 2．

故选：$C$．

【点评】本题考查了不等式恒成立的应用问题，也考查了推理与运算能力，是中档题．

11．（2021 秋•长宁区期末）设 $x$、$y\in\mathbf{R}$，$a>0$，$b>0$，若 $a^x=b^y=3$，$a+2b=2\sqrt{6}$，则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最大值为 _1__．

【考点】基本不等式及其应用．

【专题】综合题；转化思想；整体思想；转化法；函数的性质及应用；不等式的解法及应用；逻辑推理．

【分析】由 $a^x=b^y=3$ 化简得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_3 ab$，再由基本不等式可得 $2ab\bullet(\frac{a+2b}{2})^2=6$，从而可得 $ab\leqslant 3$，从而确定最大值．

【解答】解：$\because a^x=b^y=3$，$\therefore x=\log_a 3$，$y=\log_b 3$，

$\therefore \frac{1}{x}=\log_3 a$，$\frac{1}{y}=\log_3 b$，

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_3 a+\log_3 b=\log_3 ab$，

$\because 2ab\bullet(\frac{a+2b}{2})^2=6$，$\therefore ab\leqslant 3$，故 $ab$ 的最大值为 3，

当且仅当 $a=2b=\sqrt{6}$ 时，等号成立，

故 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_3 ab\bullet\log_3 3=1$，

故 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最大值为 1，

故答案为：1．

【点评】本题考查了对数式与指数式的互化，对数函数的单调性及基本不等式在求最值中的应用，同时考查了整体思想与转化思想的应用，属于中档题.