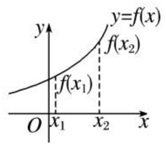
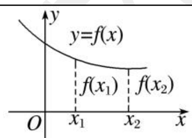
专题 2　函数专题

【知识精讲】.

1、函数的基本性质

1.1、函数的单调性

<table>
<tr><td></td><td>增函数</td><td>减函数</td></tr>
<tr><td rowspan="2">定义</td><td colspan="2">一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2</td></tr>
<tr><td>当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数</td><td>当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数</td></tr>
<tr><td>图象描述</td><td>
自左向右看图象是上升的</td><td>
自左向右看图象是下降的</td></tr>
</table>

函数单调性的常用结论

（1）若 $f(x),g(x)$ 均为区间 A 上的增(减)函数，则 $f(x)+g(x)$ 也是区间 A 上的增(减)函数；

（2）若 $k>0$，则 $kf(x)$ 与 $f(x)$ 的单调性相同；若 $k<0$，则 $kf(x)$ 与 $f(x)$ 单调性相反；

（3）函数 $y=f(x)\left(f(x)>0\right)$ 在公共定义域内与 $y=-f(x)$，$y=\dfrac{1}{f(x)}$ 的单调性相反；

（4）函数 $y=f(x)\left(f(x)\geq 0\right)$ 在公共定义域内与 $y=\sqrt{f(x)}$ 的单调性相同；

（5）一些重要函数的单调性：

① $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的单调性：在 $(-\infty,-1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上单调递减；

② $y=ax+\dfrac{b}{x}$（$a>0$，$b>0$）的单调性：在 $\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right]$ 和 $\left[\sqrt{\dfrac{b}{a}},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\sqrt{\dfrac{b}{a}},0\right)$ 和 $\left(0,\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$ 上单调递减.

1.2 函数的奇偶性

（1）．函数奇偶性的定义及图象特点

奇偶性	定义	图象特点
偶函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 是偶函数	图象关于 y 轴对称

奇函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 是奇函数	图象关于原点对称

注意：由函数奇偶性的定义可知，函数具有奇偶性的一个前提条件是：对于定义域内的任意一个 x，$-x$ 也在定义域内（即定义域关于原点对称）.

（2）. **函数奇偶性的几个重要结论**

（1）奇函数在关于原点对称的区间上的单调性相同，偶函数在关于原点对称的区间上的单调性相反.

（2）$f(x)$，$g(x)$ 在它们的公共定义域上有下面的结论：

$f(x)$	$g(x)$	$f(x)+g(x)$	$f(x)-g(x)$	$f(x)g(x)$	$f(g(x))$
偶函数	偶函数	偶函数	偶函数	偶函数	偶函数
偶函数	奇函数	不能确定	不能确定	奇函数	偶函数
奇函数	偶函数	不能确定	不能确定	奇函数	偶函数
奇函数	奇函数	奇函数	奇函数	偶函数	奇函数

（3）若奇函数的定义域包括 0，则 $f(0)=0$.

（4）若函数 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)=f(|x|)$.

（5）定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数 $f(x)$ 都可以唯一表示成一个奇函数与一个偶函数之和.

（6）若函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，则 $f(x)+f(-x)$ 为偶函数，$f(x)-f(-x)$ 为奇函数，$f(x)\cdot f(-x)$ 为偶函数.

重难点 复合函数的单调性①奇函数+奇函数=奇函数，偶函数+偶函数=偶函数；

②奇函数×奇函数=偶函数，奇函数×偶函数=奇函数，偶函数×偶函数=偶函数；

2、基本初等函数

2.1 指数与指数函数

（1）根式

概念：式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，其中 n 叫做根指数，a 叫做被开方数.

性质：$(\sqrt[n]{a})^n=a$（a 使 $\sqrt[n]{a}$ 有意义）；

当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$，当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$

（2）分数指数幂

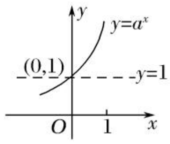
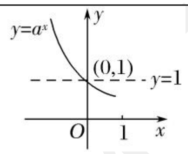
规定：正数的正分数指数幂的意义是 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ （$a>0$，m，$n\in N^*$，且 $n>1$）；正数的负分数指数幂的意义是 $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ （$a>0$，m，$n\in N^*$，且 $n>1$）；0 的正分数指数幂等于 0；0 的负分数 指数幂没有意义.

有理指数幂的运算性质：$a^ra^s=a^{r+s}$；$(a^r)^s=a^{rs}$；$(ab)^r=a^rb^r$，其中 $a>0$，$b>0$，r，$s\in Q$.

（3）指数函数及其性质

概念：函数 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$)叫做指数函数，x 是自变量，函数的定义域是 R，a 是底数.

指数函数的图象与性质

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
定义域	R	
值域	$(0，+\infty)$	
性质	过定点(0，1)，即 $x=0$ 时，$y=1$	
	当 $x>0$ 时，$y>1$； 当 $x<0$ 时，$0<y<1$	当 $x<0$ 时，$y>1$； 当 $x>0$ 时，$0<y<1$
	在$(-\infty，+\infty)$上是增函数	在$(-\infty，+\infty)$上是减函数

2.2 对数与对数函数

（1）对数的概念

如果 $a^x=N$($a>0$，且 $a\neq 1$)，那么 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $x=\log_a N$，其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数.

（2）对数的性质、换底公式与运算性质

(1)对数的性质：①$a^{\log_a N}=N$；②$\log_a a^b=b$($a>0$，且 $a\neq 1$).

(2)对数的运算法则：如果 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，那么

①$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；　②$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

③$\log_a M^n=n\log_a M$ ($n\in R$)；　④$\log_{a^n} b^m=\frac{m}{n}\log_a b$.

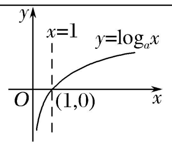
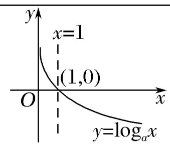
(3)换底公式：$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$（$a$，$b$ 均大于零且不等于 1）.

（3）对数函数及其性质

(1)概念：$y=\log_a x$($a>0$，且 $a\neq 1$)叫做对数函数，其中 x 是自变量，定义域是$(0，+\infty)$.

(2)对数函数的图象与性质

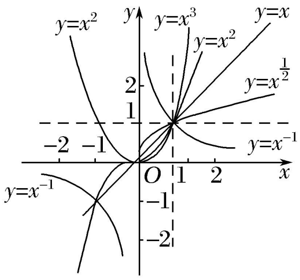
	$a>1$	$0<a<1$

图象		
性质	定义域：(0，+∞)	
	值域：R	
	当 $x=1$ 时，$y=0$，即过定点(1，0)	
	当 $x>1$ 时，$y>0$； 当 $0<x<1$ 时，$y<0$	当 $x>1$ 时，$y<0$； 当 $0<x<1$ 时，$y>0$
	在(0，+∞)上是增函数	在(0，+∞)上是减函数

2.3 幂函数

(1)幂函数的定义：一般地，形如 $y=x^{\alpha}$ 的函数称为幂函数，其中 x 是自变量，α 为常数.

(2)常见的 5 种幂函数的图象



(3)幂函数的性质

①幂函数在(0，+∞)上都有定义；

②当 $\alpha>0$ 时，幂函数的图象都过点(1，1)和(0，0)，且在(0，+∞)上单调递增；

③当 $\alpha<0$ 时，幂函数的图象都过点(1，1)，且在(0，+∞)上单调递减.

3、函数的应用

3.1 函数零点的定义

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 在实数 α 处的值等于零，即 $f(\alpha)=0$，则 α 叫做这个函数的**零点**.

重点强调：零点不是点，是一个实数；

2.零点存在性定理

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在区间（a,b）内有零点，即存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$，这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

3.二分法

二分法求零点：对于在区间 $[a，b]$ 上连续不断，且满足 $f(a)\cdot f(b)<0$ 的函数 $y=f(x)$，通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫做**二分法**.

给定精度 ε，用二分法求函数 $f(x)$ 的零点近似值的步骤如下：

（1）确定区间 $[a，b]$，验证 $f(a)\cdot f(b)<0$，给定精度 ε；

（2）求区间 $(a，b)$ 的中点 x_1；

（3）计算 $f(x_1)$：①若 $f(x_1)=0$，则 x_1 就是函数的零点；

②若 $f(a)\cdot f(x_1)<0$，则令 $b=x_1$（此时零点 $x_0\in(a,x_1)$）；

③若 $f(x_1)\cdot f(b)<0$，则令 $a=x_1$（此时零点 $x_0\in(x_1,b)$）；

（4）判断是否达到精度 ε；

即若 $|a-b|<\varepsilon$，则得到零点零点值 a（或 b）；否则重复步骤 2~4.

注意：二分法的条件 $f(a)\cdot f(b)<0$ 表明用二分法求函数的近似零点都是指变号零点.

【历年真题】

【考点 1】函数定义域

Round1 基础必过题

1．（2021 秋•闵行区期末 1）函数 $y=\log_2(1-x^2)$ 的定义域为_______.

2．（2021 秋•金山区期末 2）函数 $y=\log_2(x-1)$ 的定义域是_______.

3．（2021 秋•奉贤区期末 7）函数 $y=lg\dfrac{3-2^x}{3+2^x}$ 的定义域是 ______.

4．（2021 秋•宝山区期末 4）函数 $f(x)=ln\dfrac{2^x-4}{2^x+1}>0$ 的定义域是 _______.

【考点 2】函数的基本性质

Round1 基础必过题

1、奇偶性

1．（2021 秋•徐汇区期末 5）若函数 $f(x)=a\cdot 3^{x}+\frac{1}{3^{x}}$ 为偶函数，则实数 a＝_____.

2．（2021 秋•奉贤区期末 5）函数 $y=x^3+a\cos x$ 是奇函数，则实数 a＝_____.

2、单调性

3．（2021 秋•崇明区期末 13）下列函数中，在区间（0，+∞）上为增函数的是（　　）

A．$y=(\frac{1}{3})^{x}$　　B．$y=\log_3x$　　C．$y=\frac{1}{x}$　　D．$y=(x-1)^2$

4．（2021 秋•奉贤区期末 13）下列函数中为奇函数且在 **R** 上为增函数的是（　　）

A．$y=2^x$　　B．$y=|x|$　　C．$y=\sin x$　　D．$y=x^3$

5．（2021 秋•黄浦区期末 13）下列函数中，既是偶函数，又在区间（0，+∞）上单调递减的函数是（　　）

A．$y=x^2$　　B．$y=x^{-1}$　　C．$y=x^{-2}$　　D．$y=x^{\frac{1}{3}}$

6．（2021 秋•宝山区期末 14）已知函数 $f(x)=2^{x}-(\frac{1}{2})^{x}$，则 $f(x)$（　　）

A．是奇函数，且在（0，+∞）上是增函数

B．是偶函数，且在 **R** 上是增函数

C．是奇函数，且在（0，+∞）上是减函数

D．是偶函数，且在 **R** 上是减函数

7．（2021 秋•虹口区期末 3）已知α∈{﹣2，﹣1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，1，2，3}，若幂函数 f（x）＝x^{α}为奇函数，且在（0，+∞）上单调递减，则α＝______.

8．（2021 秋•宝山区期末 5）已知函数 f（x）＝﹣x^2+2ax+3 在区间（﹣∞，4）上是增函数，则实数 a 的取值范围是 ______.

3、 对称性

9．（2021 秋•静安区期末 15）函数 $y=x^2+|lg(x+\sqrt{x^2+1})|+1$ 的图像关于（　　）对称

A．原点　　B．x 轴　　C．y 轴　　D．直线 y=x

4、 周期性

10．（2021 秋•静安区期末 12）已知偶函数 y=f（x）是实数集上的周期为 2 的周期函数，当 x∈[2，3]时，f（x）＝2x，则当 x∈[0，2]时，f（x）=______.

【考点3】反函数

1．（2021秋•普陀区期末14）设函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 的反函数是 f^{-1}（x），若对任意的 $x\in$（0，1），则 f（x）与 f^{-1}（x）的大小关系为（　　）

A．f（x）$>f^{-1}$（x）　　　　B．f（x）$=f^{-1}$（x）

C．f（x）$<f^{-1}$（x）　　　　D．不能确定

2．（2021秋•杨浦区期末3）已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ 的反函数为 f^{-1}（x），则 f^{-1}（0）＝______．

3．（2021秋•浦东新区期末2）函数 $f(x)=\sqrt{x}+1$ 的反函数为 f^{-1}（x），则 f^{-1}（3）＝______．

4．（2021秋•闵行区期末4）若函数 f（x）$=x^3-3$ 的反函数为 $y=f^{-1}$（x），则方程 f^{-1}（x）＝0的根为_____．

5．（2021秋•青浦区期末4）已知函数 $y=f$（x）的图像经过点（2，3），$y=f$（x）的反函数为 $y=f^{-1}$（x），则函数 $y=f^{-1}$（$x-2$）的图像必经过点______．

6．（2021 秋•嘉定区期末 5）若函数 $f(x)=\log_2(x+m)+2$ 的反函数的图像经过点

（3，1），则 $f(3)=$______.

7．（2021 秋•黄浦区期末 4）设 $a>0$ 且 $a\neq1$，若函数 $y=a^x$ 的反函数的图像过点（2，－1），则 a ＝______.

【考点 4】幂函数、指数、对数函数

1．（2021 秋•静安区期末 3）已知指数函数 $y=a^x$（其中 $a>1$）在闭区间[1，2]上的最大值

比最小值大 $\frac{a}{3}$，则实数 $a=$____.

2．（2021 秋•虹口区期末 8）已知 $f(x)$ 是定义域为 **R** 的奇函数，且对任意的 x 满足 f

$(x+2)=f(x)$，若 $0<x<1$ 时，有 $f(x)=4^x+3$，则 $f(3.5)=$____.

3．（2021 秋•杨浦区期末 8）方程 $\log_3(x^2-1)=2+\log_3(x-1)$ 的解为 $x=$____.

4．（2021 秋•浦东新区期末 8）方程 $\log_2(x+1)+\log_2(x-1)=1$ 的解为 ____.

5．（2021 秋•静安区期末 13）方程$3^{\log_2 x}=\frac{1}{9}$的解是（　　）

A．$x=\frac{1}{4}$　　B．$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$x=\sqrt{2}$　　D．$x=4$

【考点 5】函数的综合问题

Round2 能力提高题

1．（2021 秋•宝山区期末 10）已知定义在 **R** 上的函数$f(x)$满足$f(2+x)=f(x)$，当$x\in[0,2]$时，$f(x)=-x(x-2)$，则方程$f(x)=|lgx|$有______个根．

2．（2021 秋•浦东新区期末 9）已知函数$f(x)=x^2+2x+3+m$，若$f(x)\geqslant 0$对任意的$x\in[1,2]$恒成立，则实数m的取值范围是______．

3．（2021 秋•普陀区期末 11）设二次函数$f(x)=mx^2-2x+n$（m，$n\in\mathbf{R}$），若函数$f(x)$的值域为$[0,+\infty)$，且$f(1)\leqslant 2$，则$\frac{m^2}{n^2+1}+\frac{n^2}{m^2+1}$的取值范围为______．

4．（2021 秋•松江区期末 12）已知函数$f(x)=\begin{cases} x-\frac{8}{x} & x<0 \\ |x-a| & x\geq 0 \end{cases}$，若对任意的$x_1\in[2,+\infty)$，都存在$x_2\in[-2,-1]$，使得$f(x_1)\cdot f(x_2)\geqslant a$，则实数$a$的取值范围为______．

5．（2021 秋•宝山区期末 16）设m，$n\in\mathbf{R}$，定义运算“Δ”和“∇”如下：

$m\triangle n=\begin{cases}m,m\leqslant n\\ n,m>n\end{cases}$，$m\nabla n=\begin{cases}n,m\leqslant n\\ m,m>n\end{cases}$．若正数 m，n，p，q 满足 $mn\geqslant4$，$p+q\leqslant4$，

（　　）

A．$m\triangle n\geqslant2$，$p\triangle q\leqslant2$　　B．$m\nabla n\geqslant2$，$p\nabla q\geqslant2$

C．$m\triangle n\geqslant2$，$p\nabla q\geqslant2$　　D．$m\nabla n\geqslant2$，$p\triangle q\leqslant2$

Round3 压轴考验题

6．（2021 秋•普陀区期末 16）设函数 $f(x)=\begin{cases}-x|x+2a|,x<-1\\ \frac{1}{2}+\log_a(x+2),x\geqslant-1\end{cases}(a>0$（$a>0$ 且 $a\neq1$）

在区间（－∞，+∞）上是单调函数，若函数 g（x）=|f（x）|－|$ax-\frac{1}{2}$|有三个不同的零

点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．（0，$\frac{1}{2}$]　　B．（$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{4}$]　　C．（$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{2}$]　　D．（$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{4}$]

7．（2021 秋•徐汇区期末 12）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2x,x>0,\\ |2x+1|,x\leqslant0\end{cases}$．设集合 A={（a，b）|a

≤－1，且 $n\leqslant b\leqslant m$，m，$n\in\mathbf{R}$}，若对任意的（a，b）∈A，总有 a•f（b）－b－$3a\geqslant0$ 成

立，则 $m-n$ 的最大值为 ____.

8．（2021 秋•闵行区期末 11）已知 $f(x)=1+ax-\sqrt{1+ax^2}$，若对任意 $x\in[0$，$\sqrt{2}\,]$，f（x）

≤0 恒成立，则实数 a 的取值范围为 ______.

9．（2021秋•青浦区期末11）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2}-x+3, x\leqslant 1\\ x+\dfrac{2}{x}, x>1\end{cases}$，设 $a\in\mathbf{R}$，若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant|\dfrac{x}{2}+a|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围是 ____.

专题1 函数专题

【历年真题】

【考点1】函数定义域

1．（2021秋•闵行区期末）函数 $y=\log_2(1-x^2)$ 的定义域为 __（﹣1，1）____．

【考点】函数的定义域及其求法．

【专题】函数思想；数学模型法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】由对数式的真数大于0求解一元二次不等式得答案．

【解答】解：要使原函数有意义，则 $1-x^2>0$，即 $-1<x<1$．

∴函数 $y=\log_2(1-x^2)$ 的定义域为（﹣1，1）．

故答案为：（﹣1，1）．

【点评】本题考查函数的定义域及其求法，是基础题．

2．（2021秋•金山区期末）函数 $y=\log_2(x-1)$ 的定义域是__（1，+∞）____．

【考点】函数的定义域及其求法；对数函数的定义域．

【专题】计算题．

【分析】由函数的解析式知，令真数 $x-1>0$ 即可解出函数的定义域．

【解答】解：∵$y=\log_2(x-1)$，∴$x-1>0$，$x>1$

函数 $y=\log_2(x-1)$ 的定义域是（1，+∞）

故答案为（1，+∞）

【点评】本题考查求对数函数的定义域，熟练掌握对数函数的定义及性质是正确解答本题的关键．

3．（2021秋•奉贤区期末）函数 $y=lg\dfrac{3-2^x}{3+2^x}$ 的定义域是 __（﹣∞，$\log_2 3$）____．

【考点】函数的定义域及其求法．

【专题】计算题；函数思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】根据函数的解析式，列出使函数解析式有意义的不等式组，求出解集即可．

【解答】解：由题意可知 $3-2^x>0$，

∴$2^x<3$，∴$x<\log_2 3$，

∴函数的定义域为（$-\infty$，$\log_2 3$），

故答案为：（$-\infty$，$\log_2 3$），

【点评】本题考查了求函数的定义域，解题的关键是列出使函数解析式有意义的不等式组，是基础题目．

4．（2021 秋•宝山区期末）函数 $f(x)=ln\dfrac{2^x-4}{2^x+1}>0$ 的定义域是 __（2，+∞）____．

【考点】函数的定义域及其求法．

【专题】计算题；函数思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】由题意得 $\dfrac{2^x-4}{2^x+1}>0>0$，从而解不等式即可．

【解答】解：由题意得，$\dfrac{2^x-4}{2^x+1}>0>0$，即 $2^x>4$，

解得，$x>\log_2 4=2$，

故答案为：（2，+∞）．

【点评】本题考查了求函数定义域的应用问题，解题的关键是列出使函数解析式有意义的不等式组，是基础题目．

【考点 2】函数的基本性质

5、 奇偶性

1．（2021 秋•徐汇区期末）若函数 $f(x)=a\cdot 3^x+\dfrac{1}{3^x}$ 为偶函数，则实数 $a=$___0___．

【考点】函数奇偶性的性质与判断．

【专题】整体思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】由已知结合奇函数性质 $f(0)=0$ 代入可求．

【解答】解：由奇函数性质得，$f(0)=a=0$，

此时 $f(x)=x^3$ 为奇函数．

故答案为：0．

【点评】本题主要考查了奇函数的定义及性质的应用，属于基础题．

2．（2021 秋•奉贤区期末）函数 $y=x^3+a\cos x$ 是奇函数，则实数 $a=$__0__．

【考点】函数奇偶性的性质与判断．

【专题】整体思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】由已知结合奇函数性质 $f(0)=0$ 代入可求．

【解答】解：由奇函数性质得，$f(0)=a=0$，

此时 $f(x)=x^3$ 为奇函数．

故答案为：0．

【点评】本题主要考查了奇函数的定义及性质的应用，属于基础题．

6、单调性

3．（2021 秋•崇明期末）下列函数中，在区间（0，+∞）上为增函数的是（　B　）

A．$y=(\frac{1}{3})^x$　　B．$y=\log_3 x$　　C．$y=\frac{1}{x}$　　D．$y=(x-1)^2$

【考点】函数单调性的性质与判断．

【专题】函数思想；综合法；函数的性质及应用；逻辑推理．

【分析】结合基本初等函数的单调性分别检验各选项即可判断．

【解答】解：根据指数函数的性质可知，$y=(\frac{1}{3})^x$在区间（0，+∞）上为减函数，不符合题意；

根据对数函数的性质可知，$y=\log_3x$在区间（0，+∞）上为增函数，符合题意；

根据幂函数的性质可知，$y=\frac{1}{x}$在区间（0，+∞）上为减函数，不符合题意；

根二次函数的性质可知，$y=(x-1)^2$在区间（0，+∞）上先减后增，不符合题意．

故选：B．

【点评】本题主要考查了基本初等函数的单调性的判断，属于基础题．

4．（2021秋•奉贤区期末）下列函数中为奇函数且在**R**上为增函数的是（　D　）

A．$y=2^x$　　B．$y=|x|$　　C．$y=\sin x$　　D．$y=x^3$

【考点】奇偶性与单调性的综合．

【专题】整体思想；综合法；函数的性质及应用；逻辑推理．

【分析】结合基本初等函数的单调性及奇偶性分别检验各选项即可判断．

【解答】解：$y=2^x$不是奇函数，A不符合题意；

$y=|x|$为偶函数，不符合题意；

$y=\sin x$在**R**上不单调，不符合题意；

根据幂函数性质可知，$y=x^3$为奇函数且在**R**上单调递增，符合题意．

故选：D．

【点评】本题主要考查了基本初等函数的单调性及奇偶性的判断，属于基础题．

5．（2021秋•黄浦区期末）下列函数中，既是偶函数，又在区间（0，+∞）上单调递减的函数是（　C　）

A．$y=x^2$　　B．$y=x^{-1}$　　C．$y=x^{-2}$　　D．$y=x^{\frac{1}{3}}$

【考点】函数单调性的性质与判断；函数奇偶性的性质与判断．

【专题】函数的性质及应用．

【分析】根据函数奇偶性的定义和函数的单调性逐项进行判断即可得到答案.

【解答】解：A、令 $f(x)=x^2$，$f(-x)=x^2=f(x)$，所以函数为偶函数，在（0，+∞）上单调递增，A 不符合题意；

B、令 $f(x)=x^{-1}$，定义域是$\{x|x\neq 0\}$，则 $f(-x)=-x^{-1}=-f(x)$，所以函数是奇函数，B 不符合题意；

C、令 $f(x)=x^{-2}$，定义域是$\{x|x\neq 0\}$，且 $f(-x)=x^{-2}=f(x)$，函数则是偶函数，但在（0，+∞）上单调递减，C 符合题意；

D、令 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，且 $f(-x)=-x^{\frac{1}{3}}=-f(x)$，函数则是奇函数，$D$ 不符合题意，

故选：C.

【点评】本题考查的知识点是函数的奇偶性，函数的单调性，熟练掌握各种基本初等函数的单调性和奇偶性是解答的关键.

6．（2021 秋•宝山区期末）已知函数 $f(x)=2^x-(\frac{1}{2})^x$，则 $f(x)$（　A　）

A．是奇函数，且在（0，+∞）上是增函数

B．是偶函数，且在 **R** 上是增函数

C．是奇函数，且在（0，+∞）上是减函数

D．是偶函数，且在 **R** 上是减函数

【考点】奇偶性与单调性的综合；函数奇偶性的性质与判断.

【专题】函数思想；定义法；函数的性质及应用；逻辑推理.

【分析】利用函数奇偶性的定义以及单调性的结论判断即可.

【解答】解：函数 $f(x)=2^x-(\frac{1}{2})^x$ 的定义域为 **R**，关于原点对称，

又 $f(-x)=2^{-x}-(\frac{1}{2})^{-x}=(\frac{1}{2})^{x}-2^{x}=-f(x)$，

所以 f（x）为奇函数，

因为 y＝2^x 为递增函数，$y=-(\frac{1}{2})^{x}$ 也为递增函数，

所以 f（x）在 **R** 上为递增函数，则在（0，+∞）上是增函数．

故选：A．

【点评】本题考查了函数单调性与奇偶性的判断，判断函数奇偶性时要先判断函数的定义域是否关于原点对称，解题的关键是掌握基本初等函数的性质，考查了逻辑推理能力，属于基础题．

7．（2021 秋•虹口区期末）已知α∈{﹣2，﹣1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，1，2，3}，若幂函数 f（x）＝$x^α$为奇函数，且在（0，+∞）上单调递减，则α＝__﹣1__．

【考点】幂函数的性质；幂函数的概念、解析式、定义域、值域．

【专题】整体思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】由已知幂函数的性质可知，α为奇数，且α＜0，结合已知集合即可求解．

【解答】解：因为α∈{﹣2，﹣1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，1，2，3}，

由幂函数 f（x）＝$x^α$为奇函数，在（0，+∞）上单调递减，

所以α为奇数，且α＜0，

所以α＝﹣1．

故答案为：﹣1．

【点评】本题主要考查了幂函数的性质的应用，属于基础题．

8．（2021 秋•宝山区期末）已知函数 f（x）＝﹣x^2+2ax+3 在区间（﹣∞，4）上是增函数，则实数 a 的取值范围是__[4，+∞）__．

【考点】二次函数的性质与图象．

【专题】整体思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】由已知结合二次函数的性质，结合已知区间与对称轴的位置关系即可求解．

【解答】解：由题意可知，二次函数的对称轴 $x=a$，

由 $f(x)=-x^2+2ax+3$ 在区间（$-\infty$，4）上是增函数，

结合二次函数的性质可知，$a\geqslant 4$．

故答案为[4，$+\infty$）

【点评】本题主要考查了二次函数性质的简单应用，属于基础试题．

7、对称性

9．（2021 秋•静安区期末）函数 $y=x^2+|lg(x+\sqrt{x^2+1})|+1$ 的图像关于（　C　）对称

A．原点　　B．x 轴　　C．y 轴　　D．直线 $y=x$

【考点】对数函数的图象与性质；奇偶函数图象的对称性．

【专题】计算题；函数思想；定义法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】先求出函数的定义域，结合函数奇偶性的定义判断函数的奇偶性即可．

【解答】解：函数的定义域为 **R**，

$\because f(-x)=(-x)^2+|lg(-x+\sqrt{x^2+1})|+1=x^2+|lg\dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}+x}|+1=x^2+|lg\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}|+1$

$=x^2+|lg(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}|+1$

$=x^2+|lg(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}|+1=x^2+|lg(x+\sqrt{x^2+1})|+1=f(x)$，

∴函数 $f(x)$ 为偶函数，则图象关于 y 轴对称，

故选：C．

【点评】本题考查函数奇偶性的判断，结合函数奇偶性的定义判断函数的奇偶性是解决本题的关键．

8、周期性

10．（2021 秋•静安区期末）已知偶函数 $y=f(x)$ 是实数集上的周期为 2 的周期函数，当 $x\in[2，3]$时，$f(x)=2x$，则当 $x\in[0，2]$时，$f(x)=$__$\begin{cases}2(x+2),x\in[0,1]\\2(-x+4),x\in(1,2]\end{cases}$__．

【考点】抽象函数及其应用；函数奇偶性的性质与判断；函数解析式的求解及常用方法

【专题】计算题；方程思想；转化思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算

【分析】根据题意，结合函数的奇偶性和周期性，分 $x\in[0，1]$和 $x\in[1，2]$讨论，求出对应的解析式，综合可得答案．

【解答】解：根据题意，设 $x\in[0，1]$，则 $x+2\in[2，3]$，则 $f（x+2）=2（x+2）$，

又由函数 $y=f（x）$是实数集上的周期为 2 的周期函数，则 $f（x）=f（x+2）=2（x+2）$，

设 $x\in（1，2]$，则 $-x\in[-2，-1]$，则 $-x+4\in[2，3]$，则 $f（-x+4）=2（-x+4）$，

$f（x）$为偶函数，且周期为 2，

则有 $f（x）=f（-x）=f（-x+4）=2（-x+4）$，

综合可得：$f(x)=\begin{cases}2(x+2),x\in[0,1]\\2(-x+4),x\in(1,2]\end{cases}$，

故答案为：$\begin{cases}2(x+2),x\in[0,1]\\2(-x+4),x\in(1,2]\end{cases}$

【点评】本题考查函数的求值，涉及函数奇偶性和周期性的应用，属于基础题．

【考点 3】反函数

1．（2021 秋•普陀区期末）设函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 的反函数是 $f^{-1}（x）$，若对任意的 $x\in$（0，1），则 $f（x）$与 $f^{-1}（x）$的大小关系为（　A　）

A．$f（x）>f^{-1}（x）$　　B．$f（x）=f^{-1}（x）$

C．$f（x）<f^{-1}（x）$　　D．不能确定

【考点】反函数．

【专题】计算题；函数思想；分析法；函数的性质及应用；数学运算．【分析】由四个选项知，本题要比较对于（0，1）内的所有 x 的值 $f（x）$与 $f^{-1}（x）$的大小，由反函数的定义知，其实就是考查自变量与函数值的大小，由函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在（0，1）的性质易得出正确选项．

【解答】解：对于函数 $f（x）=\sqrt{x}$，在（0，1）内总有 $\sqrt{x}>x$，

由反函数的定义知 $f（x）>f^{-1}（x）$，

所以 A 选项是正确的，

故选：A．

【点评】本题考查反函数的性质，属于容易题.

2．（2021 秋•杨浦区期末）已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$ 的反函数为 f^{-1}（x），则 f^{-1}（0）

＝__1__.

【考点】反函数.

【专题】计算题；函数思想；转化法；函数的性质及应用；数学运算.

【分析】直接利用反函数的关系式的定义域和函数的值的对应关系求出结果.

【解答】解：∵已知函数 $y=f$（x）存在反函数 $y=f^{-1}$（x），

设 f（x）＝0，则 $\dfrac{x-1}{x+2}=0$，解得 $x=1$，

则 f^{-1}（0）＝1.

故答案为：1.

【点评】本题考查了反函数的性质的应用，利用原函数与反函数的定义域和值域恰相反，求出反函数的函数值.

3．（2021 秋•浦东新区期末）函数 $f(x)=\sqrt{x}+1$ 的反函数为 f^{-1}（x），则 f^{-1}（3）

＝__4__.

【考点】反函数.

【专题】计算题；函数思想；定义法；函数的性质及应用；数学运算.

【分析】直接利用反函数的关系式的定义域和函数的值的对应关系求出结果.

【解答】解：∵已知函数 $y=f$（x）存在反函数 $y=f^{-1}$（x），

设 f（x）＝3，则 $\sqrt{x}+1=3$，解得 $x=4$，

则 f^{-1}（3）的值是 4.

故答案为：4．

【点评】本题考查了反函数的性质的应用，利用原函数与反函数的定义域和值域恰相反，求出反函数的函数值．

4．（2021秋•闵行区期末）若函数 $f(x)=x^3-3$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$，则方程 $f^{-1}(x)=0$ 的根为___－3___．

【考点】反函数．

【专题】转化思想；转化法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】根据已知条件可得，$x=\sqrt[3]{y+3}$，将 x 与 y 对调可得，$y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+3}$，即可求解．

【解答】解：∵$y=f(x)=x^3-3$，∴ $x=\sqrt[3]{y+3}$，

将 x 与 y 对调可得，$y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+3}$，

∵$f^{-1}(x)=0$，∴$x=-3$．

故答案为：－3．

【点评】本题主要考查反函数的求解，考查计算能力，属于基础题．

5．（2021秋•青浦区期末）已知函数 $y=f(x)$ 的图像经过点（2，3），$y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$，则函数 $y=f^{-1}(x-2)$ 的图像必经过点__（5，2）____．

【考点】反函数

【专题】转化思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】由题意根据函数与它的反函数的图像间的关系，可得 $f^{-1}(3)=2$，由此可得结论．

【解答】解：∵函数 $y=f(x)$ 的图像经过点（2，3），∴$f(2)=3$．

$y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$，故 $f^{-1}(3)=2$，

则对于函数 $y=f^{-1}(x-2)$，令 $x-2=3$，求得 $x=5$，可得 $y=f^{-1}(x-2)$ 的图像必经过点（5，2），

故答案为：（5，2）．

【点评】本题主要考查函数与它的反函数的图像间的关系，属于基础题．

6．（2021秋•嘉定区期末）若函数 f（x）$=\log_2$（$x+m$）$+2$ 的反函数的图像经过点（3，1），则 f（3）＝__4__．

【考点】反函数

【专题】整体思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】结合互为反函数的函数关系可求 a，进而可求函数解析式，代入即可求解．

【解答】解：由题意得 f（x）的图象过（1，3），

所以 $\log_2$（$1+m$）$+2=3$，

所以 $m=1$，此时 f（x）$=\log_2$（$x+1$）$+2$，

所以 f（3）$=\log_2 4+2=4$．

故答案为：4．

【点评】本题主要考查互为反函数的函数关系的应用，属于基础题．

7．（2021秋•黄浦区期末）设 $a>0$ 且 $a\neq1$，若函数 $y=a^x$ 的反函数的图像过点（2，﹣1），则 a＝__$\frac{1}{2}$__．

【考点】反函数．

【专题】整体思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】结合互为反函数的函数关系，代入即可求解．

【解答】解：由题意得，函数 $y=a^x$ 的反函数的图像过点（﹣1，2），

所以 $a^{-1}=2$，所以 $a=\frac{1}{2}$．

故答案为：$\frac{1}{2}$.

【点评】本题主要考查了互为反函数的函数关系，属于基础题．

【考点4】幂函数

1．（2021秋•静安区期末）已知指数函数 $y=a^x$（其中 $a>1$）在闭区间[1，2]上的最大值比最小值大$\frac{a}{3}$，则实数 $a=$__$\frac{4}{3}$__．

【考点】指数函数的单调性与特殊点；函数的最值及其几何意义．

【专题】计算题；函数思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】利用指数函数的单调性求解．

【解答】解：∵$a>1$，∴指数函数 $y=a^x$（其中 $a>1$）在闭区间[1，2]上单调递增，

∴ $a^2-a=\frac{a}{3}$，解得 $a=\frac{4}{3}$，

答案为：$\frac{4}{3}$.

【点评】本题主要考查了指数函数的单调性，是基础题．

5．（2021秋•虹口区期末）已知 f（x）是定义域为 **R** 的奇函数，且对任意的 x 满足 f（$x+2$）$=f$（x），若 $0<x<1$ 时，有 f（x）$=4^x+3$，则 f（3.5）$=$___﹣5___．

【考点】函数奇偶性的性质与判断．

【专题】函数思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】由已知奇函数定义及周期性把所求函数值转化到已知区间上，代入即可求解．

【解答】解：由题意得 f（﹣x）＝﹣f（x）且 f（$x+2$）$=f$（x），

因为 $0<x<1$ 时，有 f（x）$=4^x+3$，

则 f（3.5）$=f$（1.5）$=f$（﹣0.5）＝﹣f（0.5）＝﹣（2+3）＝﹣5．

故答案为：﹣5．

【点评】本题主要考查了函数性质在求解函数值中的应用，解题的关键是性质的灵活应用，属于基础题．

3．（2021 秋•杨浦区期末）方程 $\log_3(x^2-1)=2+\log_3(x-1)$ 的解为 $x=$ ___8___．

【考点】函数的零点．

【专题】转化思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】利用对数的性质及运算法则直接求解．

【解答】解：$\because\log_3(x^2-1)=2+\log_3(x-1)$，

$\therefore\log_3(x^2-1)-\log_3(x-1)=2$，

即 $\log_3(x+1)=2=\log_3 9$，

$\therefore x+1=9$ 且 $x^2-1>0$，$x-1>0$，解得 $x=8$，

故答案为：8．

【点评】本题考查对数方程的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意对数的性质、运算法则的合理运用．

4．（2021 秋•浦东新区期末）方程 $\log_2(x+1)+\log_2(x-1)=1$ 的解为 ___$\sqrt{3}$___．

【考点】函数的零点．

【专题】转化思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】利用对数的性质及运算法则直接求解．

【解答】解：$\because\log_2(x+1)+\log_2(x-1)=1$，

$\therefore\log_2(x+1)(x-1)=1=\log_2 2$，

$\therefore(x+1)(x-1)=2$ 且 $x+1>0$，$x-1>0$，故 $x=\sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{3}$．

【点评】本题考查对数方程的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意对数的性质、运算法则的合理运用．

5．（2021 秋•静安区期末 13）方程$3^{\log_2 x}=\dfrac{1}{9}$的解是（　A　）

A．$x=\dfrac{1}{4}$　　B．$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$x=\sqrt{2}$　　D．$x=4$

【考点】函数的零点.

【专题】转化思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算.

【分析】利用对数的性质及运算法则直接求解.

【解答】解：$\because 3^{\log_2 x}=\dfrac{1}{9}$，　$\therefore \log_2 x=-2$　$\therefore x=\dfrac{1}{4}$

故答案为：A.

【点评】本题考查对数方程的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意对数的性质、运算法则的合理运用.

【考点 5】函数的综合问题

1．（2021 秋•宝山区期末）已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(2+x)=f(x)$，当 $x\in[0,2]$时，$f(x)=-x(x-2)$，则方程 $f(x)=|lgx|$有 __10__ 个根.

【考点】函数的零点与方程根的关系.

【专题】函数思想；数形结合法；函数的性质及应用；逻辑推理.

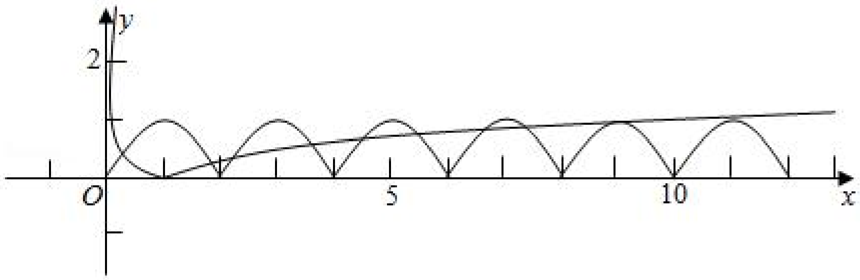
【分析】先求出函数的周期，利用已知的解析式，作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=|lgx|$的图象，由图象即可得到答案.

【解答】解：因为 $f(2+x)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 的周期为 2，

当 $x\in[0,2]$时，$f(x)=-x(x-2)$，

作出函数 $y=f(x)$ 与 $y=|lgx|$的图象如图所示，



由图象可知，函数 $y=|lgx|$与 $y=f$（x）的图象有 10 个交点，

所以方程 f（x）$=|lgx|$有 10 个根．

故答案为：10．

【点评】本题考查了函数的零点与方程的根的综合应用，解决函数零点或方程根的问题，常用的方法有：（1）方程法（直接解方程得到函数的零点）；（2）图象法（直接画出函数的图象分析得解）；（3）方程+图象法（令函数为零，再重新构造两个函数，数形结合分析得解）．属于中档题．

2．（2021 秋•浦东新区期末）已知函数 f（x）$=x^2+2x+3+m$，若 f（x）$\geqslant 0$ 对任意的 $x\in[1，2]$恒成立，则实数 m 的取值范围是 __[﹣6，+∞）___．

【考点】函数恒成立问题．

【专题】函数思想；转化法；函数的性质及应用；逻辑推理．

【分析】将问题转化为 $x^2+2x+3\geqslant -m$ 对任意的 $x\in[1，2]$恒成立，构造 g（x）$=x^2+2x+3$，利用二次函数的图象与性质，求解函数的最值，即可得到答案．

【解答】解：函数 f（x）$=x^2+2x+3+m$，且 f（x）$\geqslant 0$ 对任意的 $x\in[1，2]$恒成立，

则 $x^2+2x+3\geqslant -m$ 对任意的 $x\in[1，2]$恒成立，令 g（x）$=x^2+2x+3$，

函数 g（x）在[1，2]上单调递增，

所以 g（x）$_{min}=g$（1）$=6$，

则 $6\geqslant -m$，即 $m\geqslant -6$，

所以实数 m 的取值范围为[﹣6，+∞）．

故答案为：[﹣6，+∞）．

【点评】本题考查了二次函数图象与性质的应用，利用函数单调性求解函数最值的应用，不等式恒成立问题，要掌握不等式恒成立问题的一般求解方法：参变量分离法、数形结合法、最值法等，属于中档题．

3．（2021 秋•普陀区期末）设二次函数 f（x）$=mx^2-2x+n$（m，$n\in\mathbf{R}$），若函数 f（x）的值域为[0，+∞），且 f（1）≤2，则 $\frac{m^2}{n^2+1}+\frac{n^2}{m^2+1}$ 的取值范围为 __[1，13]__．

【考点】二次函数的性质与图象．

【专题】函数思想；转化法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】根据二次函数的性质以及基本不等式的性质求出代数式的取值范围即可．

【解答】解：二次函数 f（x）$=mx^2-2x+n$（m，$n\in\mathbf{R}$），

若函数 f（x）的值域为[0，+∞），

则 $\Delta=4-4mn=0$，解得：$mn=1$，且 $m>0$，

又 f（1）$=m-2+n\leqslant 2$，$n=\frac{1}{m}$，则 $m+\frac{1}{m}\bullet 4$，

$$\therefore \frac{m^2}{n^2+1}+\frac{n^2}{m^2+1}==\frac{m^2}{1+\frac{1}{m^2}}+\frac{\frac{1}{m^2}}{1+m^2}==\frac{m^6+1}{m^2(1+m^2)}==\frac{m^4-m^2+1}{m^2}==m^2+\frac{1}{m^2}-1,$$

而由 $m+\frac{1}{m}\bullet 4$，$m>0$，得 $2\bullet m^2+\frac{1}{m^2}\bullet 14$，

故 $m^2+\frac{1}{m^2}-1$ 的取值范围是[1，13]，

即 $\frac{m^2}{n^2+1}+\frac{n^2}{m^2+1}$ 的取值范围是[1，13]，

故答案为：[1，13]．

4．（2021 秋•松江区期末 12）已知函数 f（x）$=\begin{cases} x-\frac{8}{x} & x<0 \\ |x-a| & x\geq 0 \end{cases}$，若对任意的 $x_1\in$[2，+

∞），都存在 x_2∈[－2，－1]，使得 f（x_1）•f（x_2）≥a，则实数 a 的取值范围为

___$(-\infty,\frac{7}{4})$___.

【考点】分段函数的应用.

【专题】计算题；分类讨论；分析法；函数的性质及应用；数学运算.

【分析】问题可转化为 $|x-a|_{\min}\geq(\frac{a}{x_2-\frac{8}{x_2}})=\frac{a}{7}$，分类讨论结合 x_1∈[2，+∞）即可得出结论.

【解答】解：∵x_1∈[2，+∞），x_2∈[－2，－1]，f（x_2）＞0，

∴ $(x_2-\frac{8}{x_2})\bullet|x_1-a|\geq a$，即对任意的 x_1∈[2，+∞），都存在 x_2∈[－2，－1]，使 $|x_1-a|\geq\frac{a}{x_2-\frac{8}{x_2}}$ 恒成立，

∴有 $|x-a|_{\min}\geq(\frac{a}{x_2-\frac{8}{x_2}})=\frac{a}{7}$，

当 a≤0 时，显然不等式恒成立；

当 0＜a＜2 时，$2-a\geq\frac{a}{7}$，解得 $0<x\leq\frac{7}{4}$；

当 a≥2 时，$|x_1-a|$∈[0，+∞），此时不成立．综上，$x\leq\frac{7}{4}$．

故答案为：$(-\infty,\frac{7}{4})$

【点评】本题考查分段函数的应用，考查学生的运算能力，属于中档题.

5．（2021 秋•宝山区期末）设 m，n∈**R**，定义运算“△”和“∇”如下：

$m\triangle n=\begin{cases}m,m\bullet n\\n,m>n\end{cases}$，$m\nabla n=\begin{cases}n,m\bullet n\\m,m>n\end{cases}$．若正数 m，n，p，q 满足 mn≥4，p+q≤4，则

（ D ）

A．$m\triangle n$≥2，$p\triangle q$≤2　　　　B．$m\nabla n$≥2，$p\nabla q$≥2

C．$m\Delta n\geqslant 2$，$p\nabla q\geqslant 2$　　　　　　　　D．$m\nabla n\geqslant 2$，$p\Delta q\leqslant 2$

【考点】分段函数的应用．

【专题】新定义；转化思想；综合法；转化法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】由运算“Δ”和“∇”定义知，$m_{\Delta}n=\begin{cases}m,m\leqslant n\\n,m>n\end{cases}$ 表示数 m、n 比较小的数，$m\nabla n=\begin{cases}n,m\leqslant n\\m,m>n\end{cases}$ 表示数 m、n 比较大的数，举例可判断选项 A、B、C 错误；由不等式的性质可证明选项 D 正确．

【解答】解：由运算“Δ”和“∇”定义知，

$m_{\Delta}n=\begin{cases}m,m\leqslant n\\n,m>n\end{cases}$ 表示数 m、n 比较小的数，

$m\nabla n=\begin{cases}n,m\leqslant n\\m,m>n\end{cases}$ 表示数 m、n 比较大的数，

当 $m=1$，$n=5$ 时，$m\Delta n=1$，故选项 A、C 错误；

当 $p=q=1$ 时，$p\nabla q=1$，故选项 B 错误；

$\because m+n\geqslant 2\sqrt{mn}\geqslant 4$，且 2（$m\nabla n$）$\geqslant m+n$，$\therefore m\nabla n\geqslant 2$，

$\because pq\leqslant(\frac{p+q}{2})^{2}\leqslant 4$，（$p\Delta q$）$^{2}\leqslant pq$，

$\therefore p\Delta q\leqslant 2$，故选项 D 正确；

故选：D．

【点评】本题考查了新定义的应用及转化思想与转化法的应用，属于中档题．

6．（2021 秋•普陀区期末）设函数 $f(x)=\begin{cases}-x|x+2a|,x<-1\\\frac{1}{2}+\log_{a}(x+2),x\geqslant -1\end{cases}(a>0$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）

在区间（－∞，+∞）上是单调函数，若函数 g（x）$=|f$（x）$|-|ax-\frac{1}{2}|$有三个不同的零点，

则实数 a 的取值范围是（　D　）

A．（0，$\frac{1}{2}$]　　B．（$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{4}$]　　C．（$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{2}$]　　D．（$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{4}$]

【考点】函数的零点与方程根的关系；分段函数的应用．

【分析】由函数在 **R** 上单调可求得 $0<a<\frac{1}{4}$，利用函数 $g(x)=|f(x)|-|ax-\frac{1}{2}|$有三个不同的零点，则$\varphi(x)=|f(x)|$与 $h(x)=|ax-\frac{1}{2}|$有三个交点，得出 a 满足的条件可求得 a 的范围．

【解答】解：当 $a>1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}+\log_a(x+2)$为$[-1,+\infty)$的增函数，

当 $x<-2a<-1$ 时，$f(x)=-x(-x-2a)=x^2+2ax$，图象开口向上，不为增函数，

当 $0<a<1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}+\log_a(x+2)$为$[-1,+\infty)$的减函数，

又 $x<-2a$ 时，$f(x)=-x(-x-2a)=x^2+2ax$，所以函数在$(-\infty,-2a)$上为减函数，

函数 $f(x)=\begin{cases}-x|x+2a|,x<-1\\ \frac{1}{2}+\log_a(x+2),x\geqslant-1\end{cases}(a>0$（$a>0$ 且 $a\neq1$）在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调函数，

所以 $-2a\geqslant-1$，且 $-(-1)|-1+2a|\geqslant\frac{1}{2}+\log_a1$，解得 $a\leqslant\frac{1}{4}$，，

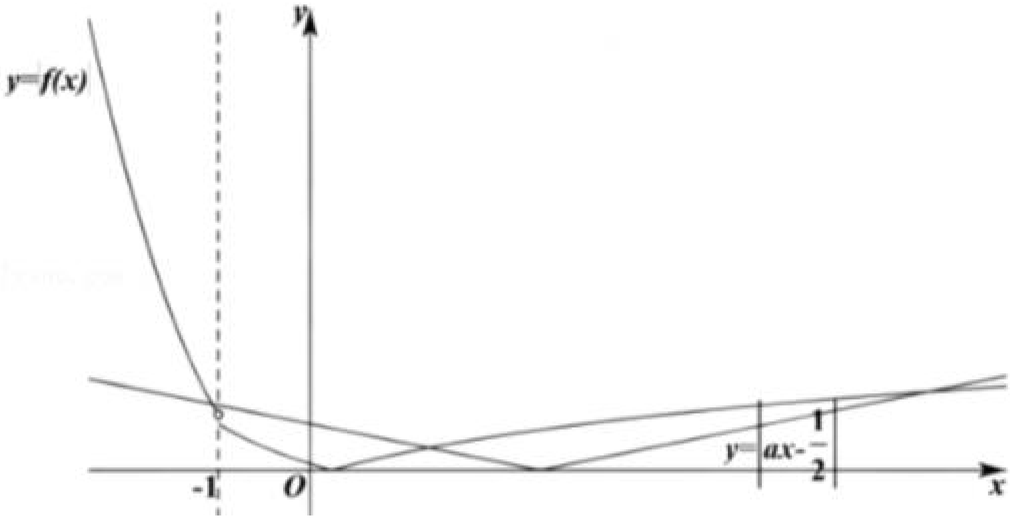
所以当 $0<a\leqslant\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 为$(-\infty,+\infty)$上是单调函数，

当 $x\geqslant-1$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}+\log_a(x+2)=0$，可得 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}-2\geqslant0$，

令 $|ax-\frac{1}{2}|=0$，可得 $x=\frac{1}{2a}$，

$\because \frac{1}{2a}-(\frac{1}{\sqrt{a}}-2)=\frac{4a-2\sqrt{a}+1}{2a}=\frac{(2\sqrt{a}-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}{2a}>0$，则 $\frac{1}{2a}>\frac{1}{\sqrt{a}}-2$，，

如下图所示，



因为$\frac{1}{2}$+log$_a$1＜a+$\frac{1}{2}$，所以函数 y=|f（x）|与函数 y=|ax－$\frac{1}{2}$|在[－1，+∞）上的图像有两个交点，

由题意可知，函数 y=|f（x）|与函数 y=|ax－$\frac{1}{2}$|在（－∞，－1）上的图像有且只有一个交点，

联立$\begin{cases} y=x^2+2ax \\ y=-ax+\frac{1}{2} \end{cases}$，可得 x^2+3ax－$\frac{1}{2}$=0，

设 h（x）=x^2+3ax－$\frac{1}{2}$，则函数 h（x）在（－∞，－1）上有且只有一个零点，

二次函数 h（x）的对称轴方程为 $x=-\frac{3a}{2}\in[-\frac{3}{8}$，0），只需 h（－1）=－3a+$\frac{1}{2}$＜0，解得 a＞$\frac{1}{6}$，

故 a 的范围为（$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{4}$].

故选：D.

【点评】本题考查分段函数的单调性及零点问题，意在考查逻辑思维能力，化归与转化能力，运算求解能力及数形结合思想，属于难题.

7．（2021 秋•徐汇区期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases} \log_2 x, x>0, \\ |2x+1|, x\leqslant 0 \end{cases}$. 设集合 A={（a，b）|a≤－1，且 n≤b≤m，m，n∈**R**}，若对任意的（a，b）∈A，总有 a•f（b）－b－3a≥0 成立，则 m－n 的最大值为 __4__.

【考点】分段函数的应用．

【专题】计算题；函数思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】由 af（b）－b－$3a$＝$[f$（b）－$3]a$－b≥0，令 g（a）＝$[f$（b）－$3]a$－b，a≤－1，要使 g（a）≥0 对任意 a≤－1 恒成立，则 $\begin{cases} f(b)-3\leqslant 0 \\ -[f(b)-3]-b\geqslant 0 \end{cases}$，求出 f（b），分别在 b>0 和 b≤0 时求解 b 的取值范围，又 n≤b≤m，所以 $\begin{cases} m\geqslant 2 \\ n\leqslant -2 \end{cases}$，所以 m－n≤4，从而求得 m－n 的最大值．

【解答】解：由 af（b）－b－$3a$＝$[f$（b）－$3]a$－b≥0，

令 g（a）＝$[f$（b）－$3]a$－b，a≤－1，

要使 g（a）≥0 对任意 a≤－1 恒成立，

则 $\begin{cases} f(b)-3\leqslant 0 \\ -[f(b)-3]-b\geqslant 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} f(b)\leqslant 3 \\ f(b)+b-3\leqslant 0 \end{cases}$ 恒成立，

由函数 $f(x)=\begin{cases} \log_2 x, x>0, \\ |2x+1|, x\leqslant 0. \end{cases}$，所以 f（b）$=\begin{cases} log_2 b, b>0 \\ |2b+1|, b\leqslant 0 \end{cases}$，

若 f（b）＝$\log_2 b$（b>0），则 $\begin{cases} log_2 b\leqslant 3 \\ log_2 b+b-3\leqslant 0 \\ b>0 \end{cases}$ 恒成立，

令φ（b）＝$\log_2 b+b-3$，在（0，+∞）为增函数，且φ（2）＝0，

所以 $\begin{cases} log_2 b\leqslant 3 \\ 0<b\leqslant 2 \end{cases}$，解得 0<$b$≤2，

若 f（b）＝$|2b+1|$，b≤0，

则 $\begin{cases} |2b+1|\leqslant 3 \\ |2b+1|+b-3\leqslant 0 \end{cases}$ 恒成立，即 $\begin{cases} -2\leqslant b\leqslant 1 \\ b-3\leqslant 2b+1\leqslant 3-b \\ b\leqslant 0 \end{cases}$ 恒成立，

所以－2≤b≤0，

要使任意的（a，b）∈A，总有 a•f（b）－b－$3a$≥0 成立，

则 0<b≤2 或－2≤b≤0，即－2≤b≤2，

又 n≤b≤m，所以 $\begin{cases} m\geqslant 2 \\ n\leqslant -2 \end{cases}$，

所以 $m-n\leqslant 4$，故 $m-n$ 的最大值为 4，

故答案为：4．

【点评】本题考查了分段函数的应用，函数的恒成立问题，属于难题．

8．（2021 秋•闵行区期末）已知 $f(x)=1+ax-\sqrt{1+ax^2}$，若对任意 $x\in[0,\sqrt{2}]$，$f(x)$ $\leqslant 0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为 $\underline{\ [1-\sqrt{2},0]\ }$．

【考点】不等式恒成立的问题．

【专题】计算题；函数思想；综合法；导数的综合应用；数学运算．

【分析】依题意，$\begin{cases} f(0)\leqslant 0 \\ f(\sqrt{2})\leqslant 0 \end{cases}$，解得 $1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 0\Rightarrow 1+ax>0$，对于任意的 $x\in[0,\sqrt{2}]$，$f(x)\leqslant 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow \dfrac{1+ax}{\sqrt{1+ax^2}}\leqslant 1$ 在 $x\in[0,\sqrt{2}]$ 上恒成立，令 $g(x)=\dfrac{1+ax}{\sqrt{1+ax^2}}$，$x\in[0,\sqrt{2}]$，求导，分析可得 $g(x)_{max}=max\{g(0),g(\sqrt{2})\}$，由 $g(0)\leqslant 1$，$g(\sqrt{2})\leqslant 1$，可求得实数 a 的取值范围．

【解答】解：∵对于任意的 $x\in[0,\sqrt{2}]$，$f(x)\leqslant 0$ 恒成立，

$\therefore\begin{cases} f(0)\leqslant 0 \\ f(\sqrt{2})\leqslant 0 \end{cases}$，解得 $1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 0$．

又当 $1-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 0$ 时，$1+ax^2>0$，

∴对于任意的 $x\in[0,\sqrt{2}]$，$f(x)\leqslant 0$ 恒成立，等价于 $\dfrac{1+ax}{\sqrt{1+ax^2}}\leqslant 1$ 在 $x\in[0,\sqrt{2}]$ 上恒成立，

令 $g(x)=\dfrac{1+ax}{\sqrt{1+ax^2}}$，$x\in[0,\sqrt{2}]$，则只需 $g(x)_{max}\leqslant 1$ 即可．

$\because g'(x)=\dfrac{a(1-x)}{(1+ax^2)\sqrt{1+ax^2}}$，且 $a\leqslant 0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,\sqrt{2})$ 上单调递增，

$\therefore g(x)_{max}=max\{g(0),g(\sqrt{2})\}$，

由 g（0）≤1，g（$\sqrt{2}$）≤1，解得 a∈[1 - $\sqrt{2}$，0].

【点评】本题考查利用导数研究函数的最值，考查构造法与函数恒成立问题的求解，突出考查转化与化归思想、函数与方程思想的综合运用，考查逻辑推理能力与运算能力，属于难题.

9．（2021 秋•青浦区期末）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3,x\leqslant 1\\ x+\dfrac{2}{x},x>1\end{cases}$，设 a∈**R**，若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant|\dfrac{x}{2}+a|$ 在 **R** 上恒成立，则 a 的取值范围是 __ $-\dfrac{47}{16}\leqslant a\leqslant 2$ __.

【考点】不等式恒成立的问题.

【专题】分类讨论；转化法；函数的性质及应用.

【分析】根据题意，分段讨论 x≤1 和 x>1 时，关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant|\dfrac{x}{2}+a|$ 在 **R** 上恒成立，去掉绝对值，利用函数的最大、最小值求得 a 的取值范围，再求它们的公共部分.

【解答】解：函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3,x\leqslant 1\\ x+\dfrac{2}{x},x>1\end{cases}$，

当 x≤1 时，关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant|\dfrac{x}{2}+a|$ 在 **R** 上恒成立，

即为 $-x^2+x-3\leqslant\dfrac{x}{2}+a\leqslant x^2-x+3$，即有 $-x^2+\dfrac{1}{2}x-3\leqslant a\leqslant x^2-\dfrac{3}{2}x+3$，

由 $y=-x^2+\dfrac{1}{2}x-3$ 的对称轴为 $x=\dfrac{1}{4}<1$，可得 $x=\dfrac{1}{4}$ 处取得最大值为 $-\dfrac{47}{16}$；

由 $y=x^2-\dfrac{3}{2}x+3$ 的对称轴为 $x=\dfrac{3}{4}<1$，可得 $x=\dfrac{3}{4}$ 处取得最小值为 $\dfrac{39}{16}$；

则 $-\dfrac{47}{16}\leqslant a\leqslant\dfrac{39}{16}$；…①

当 x>1 时，关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant|\dfrac{x}{2}+a|$ 在 **R** 上恒成立，

即为 $-(x+\dfrac{2}{x})\leqslant\dfrac{x}{2}+a\leqslant x+\dfrac{2}{x}$，即有 $-(\dfrac{3}{2}x+\dfrac{2}{x})\leqslant a\leqslant\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$，

由 $y=-(\frac{3}{2}x+\frac{2}{x})\bullet-2\sqrt{\frac{3x}{2}\cdot\frac{2}{x}}=-2\sqrt{3}$（当且仅当 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}>1)$ 取得最大值 $-2\sqrt{3}$；

由 $y=\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}\text{开}2\sqrt{\frac{1}{2}x\cdot\frac{2}{x}}=2$（当且仅当 x＝2＞1）取得最小值 2．则 $-2\sqrt{3}$ ≤a≤2；…②

由①②可得，$-\frac{47}{16}\bullet a\bullet 2$；综上，$a$ 的取值范围是 $-\frac{47}{16}\bullet a\bullet 2$．

故答案为：$-\frac{47}{16}\bullet a\bullet 2$．

【点评】本题考查了分段函数的应用问题，也考查了不等式恒成立问题，是难题．