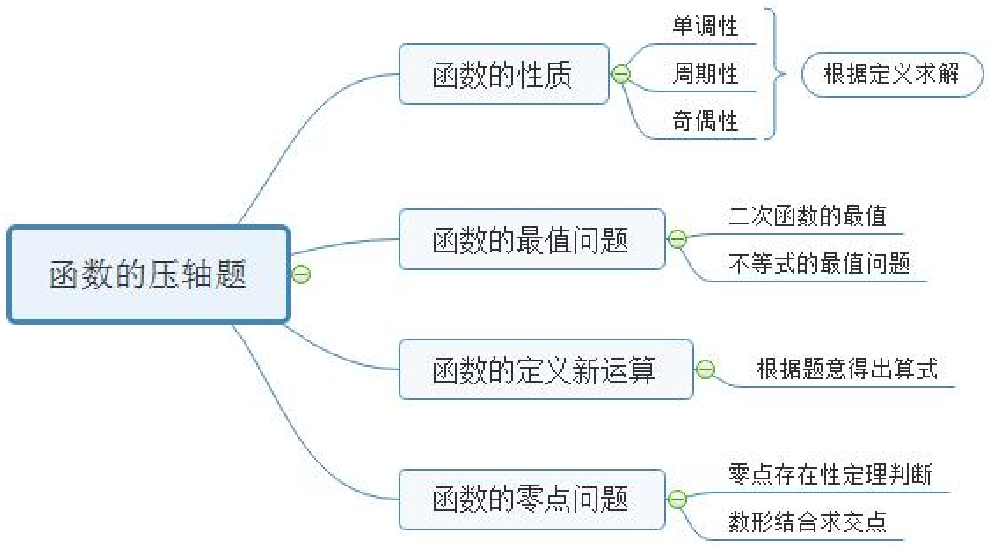
专题 3 函数应用及压轴题

【知识精讲】

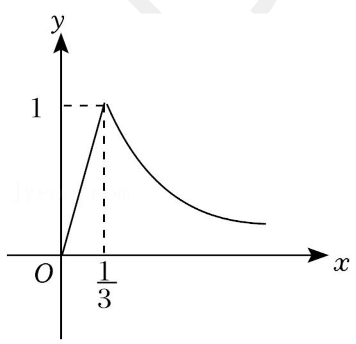


【历年真题】

【考点 1】函数应用题

Round2　能力提高题

1．（2021 秋•普陀区期末 10）由于疫情防控需要，某地铁站每天都对站内进行消毒工作，设在药物释放过程中，站内空气中的含药量 y（毫克/每立方米）与时间 x（小时）成正比 $\left(0<x<\frac{1}{3}\right)$；药物释放完毕后，$y$ 与 x 满足关系 $y=9^{b-x}$（b 为常数，$x\geqslant\frac{1}{3}$）．据测定，空气中每立方米的含药量降低到$\frac{1}{3}$毫克以下时．乘客方可进站．则地铁站应安排工作人员至少提前 ____分钟进行消毒工作．

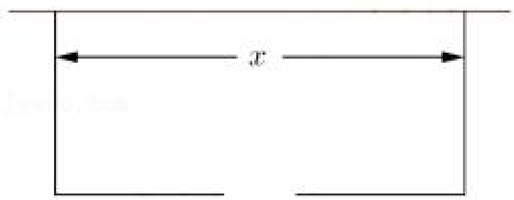


2．（2021 秋•静安区期末 19）某学校对面有一块空地要围建成 - 一个面积为 $360m^2$ 的矩形

场地，要求矩形场地的一面利用旧墙（旧墙需要整修），其它三面围墙要新建，在旧墙对面的新墙上要留一个宽度为 $2m$ 的进出口，如图所示．已知旧墙的整修费用为 45 元/m，新建墙的造价为 180 元/m，建 $2m$ 宽的进出口需 2360 元的单独费用，设利用的旧墙的长度为 x（单位：m），设修建此矩形场地围墙的总费用（含建进出口的费用）为 y（单位：元）．

（1）将 y 表示为 x 的函数；

（2）试确定 x，使修建此矩形场地围墙的总费用（含建进出口的费用）最少，并求出最少总费用．



3．（2021 秋•徐汇区期末 19）某公司经过测算，计划投资 A、B 两个项目．若投入 A 项目资金 x（万元），则一年创造的利润为 $\frac{x}{2}$（万元）；若投入 B 项目资金 x（万元），则一年创造的利润为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{10x}{30-x}, 0\leqslant x\leqslant 20\\ 20, x>20\end{cases}$（万元）．

（1）当投资 A、B 两个项目的资金相同且 B 项目比 A 项目创造的利润高，求投资 A 项目的资金 x（万元）的取值范围；

（2）若该公司共有资金 30 万元．全部用于投资 A、B 两个项目，则该公司一年分别投资 A、B 两个项目多少万元，创造的利润最大．

4．（2021 秋•青浦区期末 19）考虑到高速公路行车安全需要，一般要求高速公路的车速 v（公里/小时）控制在[60，120]范围内．已知汽车以 v 公里/小时的速度在高速公路上匀速

行驶时，每小时的油耗（所需要的汽油量）为$\frac{1}{5}(v-k+\frac{4500}{v})$升，其中$k$为常数，不同型号汽车$k$值不同，且满足$60\leqslant k\leqslant 120$.

（1）若某型号汽车以120公里/小时的速度行驶时，每小时的油耗为11.5升，欲使这种型号的汽车每小时的油耗不超过9升，求车速v的取值范围；

（2）求不同型号汽车行驶100千米的油耗的最小值.

5．（2021秋•虹口区期末19）某地政府决定向当地纳税额在4万元至8万元（包括4万元和8万元）的小微企业发放补助款，发放方案规定：补助款随企业纳税额的增加而增加，且补助款不低于纳税额的50%．设企业纳税额为x（单位：万元），补助款为$f(x)=\frac{1}{4}x^2-bx+b+\frac{1}{2}$（单位：万元），其中$b$为常数．

（1）分别判断$b=0$，$b=1$时，$f(x)$是否符合发放方案规定，并说明理由；

（2）若函数$f(x)$符合发放方案规定，求b的取值范围．

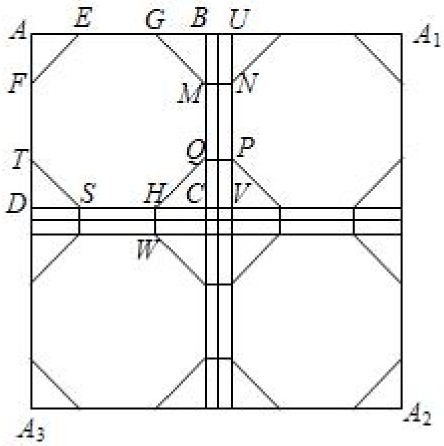
Round3　压轴挑战题

6．（2021秋•奉贤区期末19）图1是某会展中心航拍平面图，由展览场馆、通道等组成，可以假设抽象成图2，图2中的大正方形$AA_1A_2A_3$是由四个相等的小正方形（如$ABCD$）和宽度相等的矩形通道组成．展览馆可以根据实际需要进行重新布局成展览区域和休闲区域，展览区域由四部分组成，每部分是八边形，且它们互相全等．图2中的八边形$EFTSHQMG$是小正方形$ABCD$中的展览区域，小正方形$ABCD$中的四个全等的直角三角形是休闲区域，四个八边形是整个的展览区域，16个全等的直角三角形是整个的休闲区

域．设 $ABCD$ 的边长为 300 米，$\triangle AEF$ 的周长为 180 米．

（1）设 $AE=x$，求$\triangle AEF$ 的面积 y 关于 x 的函数关系式；

（2）问 AE 取多少时，使得整个的休闲区域面积最大．（长度精确到 1 米，面积精确到 1 平方米）



【考点 2】函数综合题

Round1　基础必过题

1．（2021 秋•金山区期末 18）已知函数 $f(x)=3^x$．

（1）设 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，若 $f^{-1}(x_1x_2)=1$，求 $f^{-1}(x_1^3)+f^{-1}(x_2^3)$ 的值；

（2）是否存在常数 $m\in\mathbf{R}$，使得函数 $g(x)=1+\dfrac{m}{f(x)+1}$ 为奇函数，若存在，求 m 的值，并证明此时 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，若不存在，请说明理由．

2．（2021 秋•浦东新区期末 18）已知函数 $f(x)=x^2+ax+1$，$a\in\mathbf{R}$．

（1）判断函数 f（x）的奇偶性，并说明理由；

（2）若函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}(x>0)$，写出函数 g（x）的单调递增区间并用定义证明．

Round2 能力提高题

3．（2021 秋•长宁区期末 20）已知函数 f（x）$=\dfrac{1}{2^x+1}$（x∈R）．

（1）求证：函数 f（x）是 R 上的减函数；

（2）已知函数 f（x）的图像存在对称中心（a，b）的充要条件是 g（x）$=f$（$x+a$）$-b$ 的图像关于原点中心对称，判断函数 f（x）的图像是否存在对称中心，若存在，求出该对称中心的坐标；若不存在，说明理由；

（3）若对任意 $x_1\in[1，n]$，都存在 $x_2\in[1，\dfrac{3}{2}]$及实数 m，使得 f（$1-mx_1$）$+f$（x_1x_2）$=1$，求实数 n 的最大值．

4．（2021 秋•嘉定区期末 21）已知函数 $y=f$（x）的定义域为区间 D，若对于给定的非零实数 m，存在 x_0，使得 f（x_0）$=f$（x_0+m），则称函数 $y=f$（x）在区间 D 上具有性质 P（m）．

（1）判断函数 f（x）$=x^2$ 在区间$[-1，1]$上是否具有性质 P（$\dfrac{1}{2}$），并说明理由；

（2）若函数 f（x）$=\sin x$ 在区间（0，n）（$n>0$）上具有性质 P（$\dfrac{\pi}{4}$），求 n 的取值范围；

（3）已知函数 $y=f$（x）的图像是连续不断的曲线，且 f（0）$=f$（2），求证：函数 $y=f$（x）在区间$[0，2]$上具有性质 P（$\dfrac{1}{3}$）．

5．（2021秋•崇明县期末21）对于定义域为 D 的函数 $y=f(x)$，区间 $I\subseteq D$．若 $\{y|y=f(x)，x\in I\}=I$，则称 $y=f(x)$ 为 I 上的闭函数．若存在常数 $\alpha\in(0，1]$，对于任意的 $x_1，x_2\in I$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\alpha|x_1-x_2|$，则称 $y=f(x)$ 为 I 上的压缩函数．

（1）判断命题"函数 $f(x)=\sqrt{x}$（$x\in[0，1]$）既是闭函数，又是压缩函数"的真假，并说明理由；

（2）已知函数 $y=f(x)$ 是区间[0，1]上的闭函数，且是区间[0，1]上的压缩函数，求函数 $y=f(x)$ 在区间[0，1]上的解析式，并说明理由；

（3）给定常数 $k>0$，以及关于 x 的函数 $f(x)=|1-\frac{k}{x}|$，是否存在实数 a、b（$a<b$），使得 $y=f(x)$ 是区间 $[a，b]$ 上的闭函数，若存在，求出 a、b 的值，若不存在，说明理由．

Round 3 压轴挑战题

6．（2021秋•松江区期末21）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，若存在常数 k 和 A，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $|f(x)-kx|\leqslant A$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为"拟线性函数"，其中数组（k，A）称为函数 $f(x)$ 的拟合系数．

（1）数组（2，1）是否是函数 $g(x)=\frac{2x^3}{1+x^2}$ 的拟合系数？

（2）判断函数 $s(x)=x\sin x$ 是否是"拟线性函数"，并说明理由；

（3）若奇函数 $h(x)$ 在区间 $[0，p]$（$p>0$）上单调递增，且 $h(x)$ 的图像关于点（p，q）成中心对称（其中 p，q 为常数），证明：$h(x)$ 是"拟线性函数"．

7．（2021 秋•黄浦区期末 21）设函数 $y=f(x)$ 定义在区间（a，b）上，若对任意的 x_1、x_2、x_1'、x_2'∈（a，b），当 $x_1+x_2=x_1'+x_2'$ 且 $|x_1'-x_2'|<|x_1-x_2|$ 时，不等式 $f(x_1)+f(x_2)<f(x_1')+f(x_2')$ 成立，就称函数 $y=f(x)$ 具有 M 性质．

（1）判断函数 $f(x)=2^x$，$x\in(-3，3)$ 是否具有 M 性质，并说明理由；

（2）已知函数 $y=f(x)$ 在区间（a，b）上恒正，且函数 $y=lgf(x)$，$x\in(a，b)$ 具有 M 性质，求证：对任意的 x_1、$x_2\in(a，b)$，且 $x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\cdot f(x_2)<[f(\frac{x_1+x_2}{2})]^2$；

（3）①已知函数 $y=f(x)$，$x\in(a，b)$ 具有 M 性质，证明：对任意的 x_1、x_2、$x_3\in(a，b)$，有 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\bullet 3f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})$，其中等号当且仅当 $x_1=x_2=x_3$ 时成立；

②已知函数 $f(x)=\sin x$，$x\in(0，\frac{\pi}{2})$ 具有 M 性质，若 A、B、C 为三角形 ABC 的内角，求 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的最大值．

8．（2021 秋•杨浦区期末 21）给定区间 I 和正常数 a，如果定义在 **R** 上的两个函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 满足：对一切 $x\in I$，均有 $|f(x)-g(x)|\leqslant a$，称函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 具有性质 $P(I，a)$．

（1）已知 $I=(0，+\infty)$，判断下列两组函数是否具有性质 $P(I，2)$？①$f_1(x)=\frac{1}{x^2+1}$，$g_1(x)=2$；②$f_2(x)=x^2+x+1$，$g_2(x)=x^2-x+1$；（不需要说明理由）

（2）已知 $f(x)=0$，$y=g(x)$ 是周期函数，且对任意的 $a>0$，均存在区间 $I=(M，+\infty)$，使得函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 具有性质 $P(I，a)$，求证：$g(x)=0$；

（3）已知 $I=[1，m]$，$f(x)=x^2$，若存在一次函数 $y=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 具有性质 $P(I，1)$，求实数 m 的最大值．

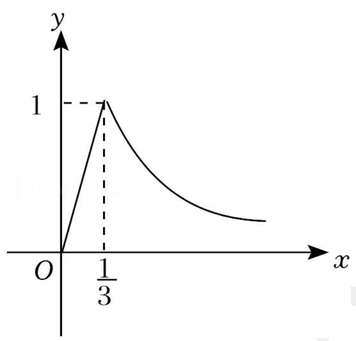
专题 3 函数应用及压轴题

【历年真题】

【考点 1】函数应用题

Round2 能力提高题

1．（2021 秋•普陀区期末）由于疫情防控需要，某地铁站每天都对站内进行消毒工作，设在药物释放过程中，站内空气中的含药量 y（毫克/每立方米）与时间 x（小时）成正比（$0<x<\frac{1}{3}$）；药物释放完毕后，y 与 x 满足关系 $y=9^{b-x}$（b 为常数，$x\geqslant\frac{1}{3}$）．据测定，空气中每立方米的含药量降低到 $\frac{1}{3}$ 毫克以下时．乘客方可进站．则地铁站应安排工作人员至少提前 __50__ 分钟进行消毒工作．



【考点】根据实际问题选择函数类型．

【专题】函数思想；数学模型法；函数的性质及应用；数学建模．

【分析】分 $0<x<\frac{1}{3}$ 和 $x\geqslant\frac{1}{3}$ 两种情况，分别利用待定系数法求出函数关系式，然后再分别求解即可．

【解答】解：由题意可知，函数过点 $(\frac{1}{3},1)$，

当 $0<x<\frac{1}{3}$ 时，设 $y=kx$，则 $1=\frac{1}{3}k$，解得 $k=3$，所以 $y=3x$，

当 $x\geqslant\frac{1}{3}$ 时，$y=9^{b-x}$ 过点 $(\frac{1}{3},1)$，则 $1=9^{b-\frac{1}{3}}$，解得 $b=\frac{1}{3}$，

所以 $y=9^{\frac{1}{3}-x}$，$9^{\frac{1}{3}-x}=\frac{1}{3}$

当 $0<x<\frac{1}{3}$ 时，空气中每立方米的含药量逐渐升高至 1 毫克；

当 x开$\frac{1}{3}$ 时，空气中每立方米的含药量逐渐降低，

取 $y=9^{\frac{1}{3}-x}=\frac{1}{3}$，解得 $x=\frac{5}{6}$ 小时 50 分钟，

所以地铁站应安排工作人员至少提前 50 分钟进行消毒工作．

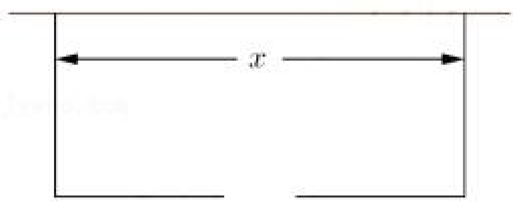
故答案为：50．

【点评】本题考查了函数模型的选择与应用，解题的关键是建立符合条件的函数模型，分析清楚问题的逻辑关系是解题的关键，此类问题求解的一般步骤是：建立函数模型，进行函数计算，得出结果，再将结果反馈到实际问题中指导解决问题，考查了逻辑推理能力与化简运算能力，属于中档题．

2．（2021 秋•静安区期末）某学校对面有一块空地要围建成－一个面积为 $360m^2$ 的矩形场地，要求矩形场地的一面利用旧墙（旧墙需要整修），其它三面围墙要新建，在旧墙对面的新墙上要留一个宽度为 $2m$ 的进出口，如图所示．已知旧墙的整修费用为 45 元/m，新建墙的造价为 180 元/m，建 $2m$ 宽的进出口需 2360 元的单独费用，设利用的旧墙的长度为 x（单位：m），设修建此矩形场地围墙的总费用（含建进出口的费用）为 y（单位：元）．

（1）将 y 表示为 x 的函数；

（2）试确定 x，使修建此矩形场地围墙的总费用（含建进出口的费用）最少，并求出最少总费用．



【考点】根据实际问题选择函数类型．

【专题】转化思想；转化法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】（1）设矩形的另一边长为 a 米，则 $y=45x+180(x-2)+180\cdot 2a+2360$，$=225x+360a+2000$，再结合矩形面积，即可求解．

（2）根据已知条件，结合基本不等式的公式，即可求解．

【解答】解：（1）设矩形的另一边长为 a 米，

则 $y=45x+180(x-2)+180\cdot 2a+2360$，$=225x+360a+2000$，

$\because ax=360$，$\therefore a=\dfrac{360}{x}$，

则 $y=225x+\dfrac{360^2}{x}+2000(x>2)$．

（2）由（1）可得，$y=225x+\dfrac{360^2}{x}+2000(x>2)$，

则 $y=225x+\dfrac{360^2}{x}+2000\geqslant 2\sqrt{225x\cdot\dfrac{360^2}{x}}+2000=12800$，

当且仅当 $225x=\dfrac{360^2}{x}$，即 $x=24$ 时，等号成立，

故当 $x=24$ 时，使修建此矩形场地围墙的总费用（含建进出口的费用）最少，最少总费用为 12800 元．

【点评】本题主要考查函数的实际应用，掌握基本不等式公式是解本题的关键，属于中档题．

3．（2021 秋•徐汇区期末）某公司经过测算，计划投资 A、B 两个项目．若投入 A 项目资金 x（万元），则一年创造的利润为 $\dfrac{x}{2}$（万元）；若投入 B 项目资金 x（万元），则一年创造的利润为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{10x}{30-x},0\leqslant x\leqslant 20\\ 20,x>20\end{cases}$（万元）．

（1）当投资 A、B 两个项目的资金相同且 B 项目比 A 项目创造的利润高，求投资 A 项目的资金 x（万元）的取值范围；

（2）若该公司共有资金 30 万元．全部用于投资 A、B 两个项目，则该公司一年分别投资 A、B 两个项目多少万元，创造的利润最大．

【考点】根据实际问题选择函数类型；基本不等式及其应用．

【专题】函数思想；数学模型法；函数的性质及应用；数学建模．

【分析】（1）分 $0\leqslant x\leqslant 20$，$x>20$ 两种情况，由 A 项目的利润小于 B 项目的利润，列出不等式，求解即可；

（2）分 $0\leqslant y\leqslant 20$，$y>20$ 两种情况，分别求出 x 的范围，求出利用 $f(x)$ 的解析式，求解 $f(x)$ 的最大值，比较即可得到答案．

【解答】解：（1）当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时，A 项目的利润小于 B 项目的利润，

则 $\frac{x}{2}<\frac{10x}{30-x}$，即 $x(x-10)>0$，解得 $x<0$ 或 $x>10$，

所以 $10<x\leqslant 20$；当 $x>20$ 时，A 项目的利润小于 B 项目的利润，

则 $\frac{x}{2}<20$，解得 $x<40$，所以 $20<x<40$．

综上所述，x 的取值范围为 $(10,40)$，

故投资 A 项目的资金 x（万元）的取值范围为 $(10,40)$；

（2）设投入 A 项目 x 万元，投入 B 项目为 y 万元，

所以 $x+y=30$，当 $0\leqslant y\leqslant 20$ 时，可得 $10\leqslant x\leqslant 30$，

此时的利润为 $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{10y}{30-y}=\frac{x}{2}+\frac{300}{x}-10$

所以 $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{300}{x^2}$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=10\sqrt{6}$，

当 $10\leqslant x<10\sqrt{6}$ 时，$f'(x)<0$，当 $10\sqrt{6}\leqslant x\leqslant 30$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $[10,10\sqrt{6})$ 上单调递减，在 $[10\sqrt{6},30]$ 上单调递增，

又 $f(10)=25$，$f(30)=15$，

所以当 $x=10$ 时，$f(x)$ 取得最大值 25；

当 $20<y\leqslant 30$ 时，则 $0\leqslant x<10$，

所以利润 $f(x)=20+\frac{x}{2}$，

则 $f(x)$ 在 $[0,10)$ 上单调递增，

故 $f(x)<f(10)=25$．

综上所述，当 A 项目投资 10 万元，B 项目投资 20 万元时，利润最大，最大为 25 万元．

【点评】本题考查了函数模型的选择与应用，解题的关键是建立符合条件的函数模型，分析清楚问题的逻辑关系是解题的关键，此类问题求解的一般步骤是：建立函数模型，进行函数计算，得出结果，再将结果反馈到实际问题中指导解决问题，考查了逻辑推理能力与化简运算能力，属于中档题．

4．（2021 秋•青浦区期末）考虑到高速公路行车安全需要，一般要求高速公路的车速 v（公里/小时）控制在[60，120]范围内．已知汽车以 v 公里/小时的速度在高速公路上匀速行驶时，每小时的油耗（所需要的汽油量）为 $\frac{1}{5}(v-k+\frac{4500}{v})$ 升，其中 k 为常数，不同型号汽车 k 值不同，且满足 60≤k≤120．

（1）若某型号汽车以 120 公里/小时的速度行驶时，每小时的油耗为 11.5 升，欲使这种型号的汽车每小时的油耗不超过 9 升，求车速 v 的取值范围；

（2）求不同型号汽车行驶 100 千米的油耗的最小值．

【考点】根据实际问题选择函数类型；基本不等式及其应用．

【专题】函数思想；数学模型法；函数的性质及应用；数学建模．

【分析】（1）由题意，先求出 k 的值，然后建立不等式 $\frac{1}{5}(v-100+\frac{4500}{v})\bullet 9$，求解即可；

（2）设该汽车行驶 100 千米油耗为 y 升，求出 y 的函数解析式，令 $t=\frac{1}{v}$，则 $t\in[\frac{1}{120},\frac{1}{60}]$，得到 $y=90000t^2-20kt+20=90000(t-\frac{k}{9000}^2)+20-\frac{k^2}{900}$，分 $t=\frac{k}{9000}\text{开}\frac{1}{120}$ 和 $t=\frac{k}{9000}<\frac{1}{120}$ 两种情况，由二次函数的性质求解最小值，即可得到答案

【解答】解：（1）由题意可得，当 v＝120 时，$\frac{1}{5}(v-k+\frac{4500}{v})=11.5$，解得 k＝100，

由 $\frac{1}{5}(v-100+\frac{4500}{v})\bullet 9$，即 v^2﹣145v+4500≤0，解得 45≤v≤100，

又 60≤v≤120，所以 60≤v≤100，

故欲使这种型号的汽车每小时的油耗不超过 9 升，则车速 v 的取值范围为[60，100]；

（2）设该汽车行驶 100 千米油耗为 y 升，

则 $y=\frac{100}{v}\cdot\frac{1}{5}(v-k+\frac{4500}{v})=20-\frac{20k}{v}+\frac{90000}{v^2}$，其中 $60 \leqslant v \leqslant 120$，

令 $t=\frac{1}{v}$，则 $t\in[\frac{1}{120},\frac{1}{60}]$，

所以 $y=90000t^2-20kt+20=90000(t-\frac{k}{9000})^2+20-\frac{k^2}{900}$，

对称轴方程为 $t=\frac{k}{9000}$，

因为 $60 \leqslant k \leqslant 120$，则 $t=\frac{k}{9000}\in[\frac{1}{150},\frac{1}{90}]$，

① 当 $t=\frac{k}{9000}\geqslant\frac{1}{120}$，即 75≤$k$＜100 时，则当 $t=\frac{k}{9000}$，即 $v=\frac{9000}{k}$ 时，$y_{min}=20-\frac{k^2}{900}$；

② 当 $t=\frac{k}{9000}<\frac{1}{120}$，即 60≤$k$＜75 时，则当 $t=\frac{1}{120}$，即 $v=120$ 时，$y_{min}=\frac{105}{4}-\frac{k}{6}$．

综上所述，当 75≤k＜100 时，该汽车行驶 100 千米的油耗的最小值为 $20-\frac{k^2}{900}$ 升；

当 60≤k＜75 时，该汽车行驶 100 千米的油耗的最小值为 $\frac{105}{4}-\frac{k}{6}$ 升.

【点评】本题考查了函数模型的选择与应用，解题的关键是建立符合条件的函数模型，分析清楚问题的逻辑关系是解题的关键，此类问题求解的一般步骤是：建立函数模型，进行函数计算，得出结果，再将结果反馈到实际问题中指导解决问题，考查了逻辑推理能力与化简运算能力，属于中档题.

5．（2021 秋•虹口区期末）某地政府决定向当地纳税额在 4 万元至 8 万元（包括 4 万元和 8 万元）的小微企业发放补助款，发放方案规定：补助款随企业纳税额的增加而增加，且补助款不低于纳税额的 50%．设企业纳税额为 x（单位：万元），补助款为 $f(x)=\frac{1}{4}x^2-bx+b+\frac{1}{2}$（单位：万元），其中 b 为常数．

（1）分别判断 $b=0$，$b=1$ 时，$f(x)$ 是否符合发放方案规定，并说明理由；

（2）若函数 $f(x)$ 符合发放方案规定，求 b 的取值范围．

【考点】根据实际问题选择函数类型

【专题】函数思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算

【分析】(1) 把 $b=0$，$b=1$ 分别代入已知函数中，检验两个条件是否满足即可判断；

（2）由题意得 $f(x)=\frac{1}{4}x^2-bx+b+\frac{1}{2}$ 在[4，8]上单调递增且 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x$ 在[4，8]上恒成立，结合二次函数的性质可求．

【解答】解：（1）当 $b=0$ 时，$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}$ 在[4，8]上单调递增，

因为 $4\leqslant x\leqslant 8$，$4.5\leqslant\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\leqslant 16.5$，符合发放方案规定，

当 $b=1$ 时，$f(x)=\frac{1}{4}x^2-x+\frac{3}{2}$，

当 $4\leqslant x\leqslant 8$ 时，结合二次函数的性质可知，f（x）在[4，8]上单调递增，f（4）$=\frac{3}{2}<2$，不符合发放方案规定；

（2）若函数 f（x）符合发放方案规定，则 $f(x)=\frac{1}{4}x^2-bx+b+\frac{1}{2}$ 在[4，8]上单调递增且 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x$ 在[4，8]上恒成立，，整理得，$x^2-(2+4b)x+4b+2\geqslant 0$ 在[4，8]上恒成立，

结合二次函数的性质可知，$\begin{cases}2b\leqslant 4\\16-4(2+4b)+4b+2\geqslant 0\\64-8(2+4b)+4b+2\geqslant 0\end{cases}$，

解得，$b\leqslant\frac{5}{6}$，

所以 b 的范围为 $\{b\,|\,b\leqslant\frac{5}{6}\}$．

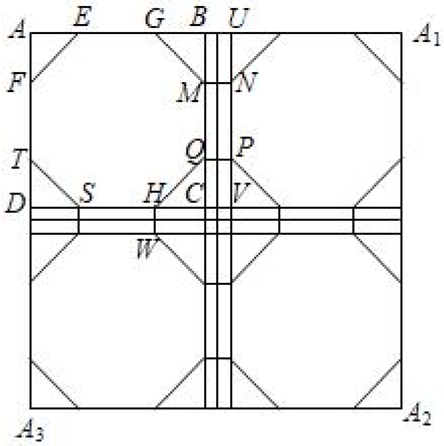
【点评】本题主要考查了二次函数的性质在实际问题中的应用，解题的关键是性质的灵活应用，属于中档题．

Round3　**压轴挑战题**

6．（2021 秋•奉贤区期末）图 1 是某会展中心航拍平面图，由展览场馆、通道等组成，可以假设抽象成图 2，图 2 中的大正方形 $AA_1A_2A_3$ 是由四个相等的小正方形（如 $ABCD$）和宽度相等的矩形通道组成．展览馆可以根据实际需要进行重新布局成展览区域和休闲区域，展览区域由四部分组成，每部分是八边形，且它们互相全等．图 2 中的八边形 $EFTSHQMG$ 是小正方形 $ABCD$ 中的展览区域，小正方形 $ABCD$ 中的四个全等的直角三角形是休闲区域，四个八边形是整个的展览区域，16 个全等的直角三角形是整个的休闲区域．设 $ABCD$ 的边长为 300 米，△AEF 的周长为 180 米．

（1）设 $AE=x$，求△AEF 的面积 y 关于 x 的函数关系式；

（2）问 AE 取多少时，使得整个的休闲区域面积最大．（长度精确到 1 米，面积精确到 1 平方米）



【考点】根据实际问题选择函数类型．

【专题】函数思想；综合法；函数的性质及应用；逻辑推理；数学运算．

【分析】（1）根据给定条件结合勾股定理用 x 表示出 AF 长即可求出函数关系式．

（2）利用（1）的函数关系借助换元法求出 y 的最大值及对应的 x 值即可计算作答．

【解答】解：（1）依题意，在 Rt△AEF 中， $EF=\sqrt{x^2+AF^2}$，

则有 $x+AF+\sqrt{x^2+AF^2}=180$，解得 $AF=\dfrac{180(90-x)}{180-x}(0<x<90)$ $\dfrac{180(90-x)}{180-x}$（$0<x<90$），则△AEF 的面积 $y=\dfrac{1}{2}\cdot AE\cdot AF=\dfrac{90(90-x)x}{180-x}$，

所以△AEF 的面积 y 于 x 函数关系式是： $y=\dfrac{90(90-x)x}{180-x}(0<x<90)$；

（2）由（1）知， $y=\dfrac{90(90-x)x}{180-x}(0<x<90)$，令 $180-x=t\in$（90，180），

$$y=\frac{90(180-t)(t-90)}{t}=90[270-(t+\frac{16200}{t})]\bullet 90(270-2\sqrt{t\cdot\frac{16200}{t}})=8100(3-2\sqrt{2}),$$

当且仅当 $t=\dfrac{16200}{t}$，即 $t=90\sqrt{2}$ 时取“＝”，

整个休闲区域是 16 个与 Rt△AEF 全等的三角形组成，

因此整个休闲区域面积最大，当且仅当△AEF 的面积 y 最大，

当 $t=90\sqrt{2}$，即 $x=180-90\sqrt{2}\approx 53$ 米，整个休闲区域面积最大为 $y=\dfrac{90\times(90-53)\times 53}{180-53}\times 16\approx 22235$ 平方米，所以当 AE 取 53 米时，整个休闲区域面积最大为 22235 平方米．

【点评】本题考查了函数的实际应用，在第（2）问中运用了基本不等式求函数的最值，将 $y=\dfrac{90(90-x)x}{180-x}(0<x<90)$ 变形为 $y=90[270-(t+\dfrac{16200}{t})]$ 是解决此问题的关键，属于难题．

【考点 2】函数综合题

Round1　基础必过题

1．（2021 秋•金山区期末）已知函数 $f(x)=3^x$．

（1）设 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，若 $f^{-1}(x_1x_2)=1$，求 $f^{-1}(x_1^3)+f^{-1}(x_2^3)$ 的值；

（2）是否存在常数 $m\in\mathbf{R}$，使得函数 $g(x)=1+\dfrac{m}{f(x)+1}$ 为奇函数，若存在，求 m 的值，并证明此时 $g(x)$ 在（$-\infty$，$+\infty$）上单调递增，若不存在，请说明理由．

【考点】奇偶性与单调性的综合；反函数．

【专题】转化思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】（1）求得 $f^{-1}(x)=\log_3x$，再由对数的运算性质可得所求值；

（2）假设存在常数 $m\in\mathbf{R}$，使得函数 $g(x)=1+\dfrac{m}{f(x)+1}$ 为奇函数，由 $g(0)=0$，解方程可得 m，检验可得结论；再由单调性的定义证明 $g(x)$ 的单调性，注意取值、作差和变形、定符号和下结论等步骤．

【解答】解：（1）由 $f(x)=3^x$，$y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，

可得 $f^{-1}(x)=\log_3x$，$f^{-1}(x_1x_2)=\log_3(x_1x_2)=1$，

即有 $x_1x_2=3$，

所以 $f^{-1}(x_1^3)+f^{-1}(x_2^3)=\log_3x_1^3+\log_3x_2^3=3(\log_3x_1+\log_3x_2)=3\log_3(x_1x_2)=3$；

（2）假设存在常数 $m\in\mathbf{R}$，使得函数 $g(x)=1+\dfrac{m}{f(x)+1}$ 为奇函数．

由 $g(x)=1+\dfrac{m}{f(x)+1}$ 为 R 上的奇函数，可得 $g(0)=1+\dfrac{1}{2}m=0$，解得 $m=-2$，

即有 $g(x)=1+\frac{m}{f(x)+1}$， $g(-x)+g(x)=1+\frac{-2}{1+3^{-x}}+1+\frac{-2}{1+3^{x}}=2-2\cdot\frac{1+3^{x}}{1+3^{x}}=0$，

所以存在 $m=-2$，使得 $g(x)$ 为奇函数；

证明：设 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$， $g(x_1)-g(x_2)=-\frac{2}{1+3^{x_1}}+\frac{2}{1+3^{x_2}}=2\cdot\frac{3^{x_1}-3^{x_2}}{(1+3^{x_1})(1+3^{x_2})}$，

由 $x_1<x_2$，可得 $0<3^{x_1}<3^{x_2}$，即 $3^{x_1}-3^{x_2}<0$，所以 $g(x_1)-g(x_2)<0$，即 $g(x_1)<g(x_2)$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

【点评】本题考查函数的奇偶性和单调性的判断和运用，以及函数的反函数的求法，考查转化思想和运算能力，属于基础题.

2. （2021秋•浦东新区期末）已知函数 $f(x)=x^2+ax+1$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

（2）若函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}(x>0)$，写出函数 $g(x)$ 的单调递增区间并用定义证明.

【考点】二次函数的性质与图象；函数奇偶性的性质与判断.

【专题】函数思想；综合法；函数的性质及应用；逻辑推理.

【分析】（1）分 $a=0$ 和 $a\neq0$ 两种情况，分别利用奇函数与偶函数的定义分析判断即可；

（2）利用函数单调性的定义判断并证明即可.

【解答】解：（1）当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 为偶函数，证明如下：

函数 $f(x)=x^2+1$，定义域为 $\mathbf{R}$，

$\because f(-x)=x^2+1=f(x)$，

$\therefore$ 当 $a=0$ 时，函数 $f(x)$ 为偶函数；

当 $a\neq0$ 时，$f(-1)=2-a$，$f(1)=2+a$，

则 $f(-1)\neq f(1)$，$f(-1)\neq -f(1)$，

函数 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

（2）函数 $g(x)$ 的单调递增区间为$[1,+\infty)$，证明如下：

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=x+\dfrac{1}{x}+a$，设 $1\leqslant x_1<x_2$，

则 $g(x_1)-g(x_2)=x_1+\dfrac{1}{x_1}+a-(x_2+\dfrac{1}{x_2}+a)=(x_1-x_2)(1-\dfrac{1}{x_1x_2})=\dfrac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2}$，

由于 $1\leqslant x_1<x_2$，

则 $x_1-x_2<0$，$\dfrac{x_1x_2-1}{x_1x_2}>0$，

所以 $f(x_1)<f(x_2)$，

则函数 $g(x)$ 的单调递增区间为$[1,+\infty)$.

【点评】本题考查了函数单调性和奇偶性的判断与证明，考查了函数奇偶性与单调性的定义，考查了逻辑推理能力与化简运算能力，属于基础题.

Round2　能力提高题

3．（2021 秋•长宁区期末）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$（$x\in R$）.

（1）求证：函数 $f(x)$ 是 R 上的减函数；

（2）已知函数 $f(x)$ 的图像存在对称中心（a，b）的充要条件是 $g(x)=f(x+a)-b$ 的图像关于原点中心对称，判断函数 $f(x)$ 的图像是否存在对称中心，若存在，求出该对称中心的坐标；若不存在，说明理由；

（3）若对任意 $x_1\in[1,n]$，都存在 $x_2\in[1,\dfrac{3}{2}]$及实数 m，使得 $f(1-mx_1)+f(x_1x_2)=1$，求实数 n 的最大值.

【考点】函数与方程的综合运用.

【专题】整体思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算.

【分析】（1）先设 $x_1 < x_2$，然后利用作差法比较 f（x_1）与 f（x_2）的大小即可判断；

（2）结合函数的对称性及恒成立问题可建立关于 a，b 的方程，进而可求 a，b；

（3）由已知代入整理可得 x_1，x_2 的关系，然后结合恒成立可求 m 的范围，进而可求．

【解答】（1）证明：设 $x_1 < x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{1+2^{x_1}}-\dfrac{1}{1+2^{x_2}}=\dfrac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(1+2^{x_1})(1+2^{x_2})}>0$，

所以 f（x_1）$>f$（x_2），

所以 f（x）在 **R** 上单调递减；

（2）解：假设函数 f（x）的图像存在对称中心（a，b），

则 $g(x)=f(x+a)-b=\dfrac{1}{1+2^{x-a}}-b$ 的图象关于原点对称，

则 $g(-x)+g(x)=\dfrac{1}{1+2^{a-x}}+\dfrac{1}{1+2^{a+x}}-2b=0$ 恒成立，

整理得 $(1-2b)(2^{a+x}+2^{a-x})+2-2b-2b\cdot 2^{2a}=0$ 恒成立，

所以 $\begin{cases}1-2b=0\\2-2b-2b\cdot 2^{2a}=0\end{cases}$，

故函数 f（x）的对称中心为（0，$\dfrac{1}{2}$）；

（3）解：因为对任意 $x_1\in[1，n]$，都存在 $x_2\in[1，\dfrac{3}{2}]$及实数 m，使得 f（$1-mx_1$）$+f$（x_1x_2）$=1$，

所以 $\dfrac{1}{1+2^{1-mx_1}}+\dfrac{1}{1+2^{x_1x_2}}=1$，即 $2^{1-mx_1+x_1x_2}=1$，

所以 $1-mx_1+x_1x_2=0$，

所以 $x_2=m-\dfrac{1}{x_1}$，

因为 $x_1\in[1，n]$，所以 $m-\dfrac{1}{x_1}\in[m-1，\ m-\dfrac{1}{n}]$，

因为 $x_2\in[1，\dfrac{3}{2}]$，所以 $[m-1，\ m-\dfrac{1}{n}]\subseteq[1，\dfrac{3}{2}]$，

所以$\begin{cases} m-1\text{开}1 \\ m-\dfrac{1}{n}\bullet\dfrac{3}{2} \end{cases}$，即$\begin{cases} m\text{开}2 \\ \dfrac{1}{n}\text{开}m-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

所以$\dfrac{1}{n}\text{开}(m-\dfrac{3}{2})_{min}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $n\leqslant 2$，即 n 的最大值为 2．

【点评】本题主要考查了函数的单调性，对称性的应用，还考查了不等式的恒成立问题求解参数范围，属于中档题．

4．（2021 秋•嘉定区期末）已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为区间 D，若对于给定的非零实数 m，存在 x_0，使得 $f(x_0)=f(x_0+m)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上具有性质 $P(m)$．

（1）判断函数 $f(x)=x^2$ 在区间[－1，1]上是否具有性质 $P(\dfrac{1}{2})$，并说明理由；

（2）若函数 $f(x)=\sin x$ 在区间（0，n）（$n>0$）上具有性质 $P(\dfrac{\pi}{4})$，求 n 的取值范围；

（3）已知函数 $y=f(x)$ 的图像是连续不断的曲线，且 $f(0)=f(2)$，求证：函数 $y=f(x)$ 在区间[0，2]上具有性质 $P(\dfrac{1}{3})$．

【考点】函数与方程的综合运用．

【专题】计算题；函数思想；综合法；函数的性质及应用；数学运算．

【分析】（1）若 $x_0^{\ 2}=(x_0+\dfrac{1}{2})^2$，则 $x_0=-\dfrac{1}{4}$，显然函数 $f(x)=x^2$ 在区间[－1，1]上具有性质 $P(\dfrac{1}{2})$．

（2）由题意，存在 $x_0\in$（0，n），使得 $\sin x_0=\sin(x_0+\dfrac{\pi}{4})$，由三角函数的性质可得 $x_0=k\pi+\dfrac{3\pi}{8}$，又因为 $x_0=k\pi+\dfrac{3\pi}{8}\in$（0，$n$）且 $x_0+\dfrac{\pi}{4}=k\pi+\dfrac{5\pi}{8}\in(0\in$（0，$n$）（$k\in\mathbf{N}$），从而求出 n 的取值范围．

（3）设 g（x）$=f$（x）$-f$（$x+\frac{1}{3}$），$x\in[0,\frac{5}{3}]$，则有 $g(0)=f(0)-f(\frac{1}{3})$，$g(\frac{1}{3})=f(\frac{1}{3})-f(\frac{2}{3})$，$g$（$\frac{2}{3}$）$=f$（$\frac{2}{3}$）$-f$（1），…，$g$（$\frac{k-1}{3}$）$=f$（$\frac{k-1}{3}$）$-f$（$\frac{k}{3}$），…，$g$（$\frac{5}{3}$）$=f$（$\frac{5}{3}$）$-f$（2），（$k\in\{1$，2，3，…，$6\}$），以上各式相加得 $g(0)+g(\frac{1}{3})+\ldots+g(\frac{k-1}{3})+\ldots+g(\frac{5}{3})=0$，再对其中是否有为 0 的数，分情况讨论，结合性质 P（$\frac{1}{3}$）的定义，即可证得函数 $y=f$（x）在区间[0，2]上具有性质 P（$\frac{1}{3}$）．

【解答】解：（1）函数 f（x）$=x^2$ 在区间[－1，1]上具有性质 P（$\frac{1}{2}$），

若 $x_0^{\ 2}=(x_0+\frac{1}{2})^2$，则 $x_0=-\frac{1}{4}$，

因为－$\frac{1}{4}\in[-1,1]$，且－$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\in[-1,1]$，

所以函数 f（x）$=x^2$ 在区间[－1，1]上具有性质 P（$\frac{1}{2}$）．

（2）由题意，存在 $x_0\in$（0，n），使得 $\sin x_0=\sin(x_0+\frac{\pi}{4})$，

由正弦线的定义得 $x_0+\frac{\pi}{4}=x_0+2k\pi$（舍）或 $x_0+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-x_0(k\in Z)$（$k\in\mathbf{Z}$），

则得 $x_0=k\pi+\frac{3\pi}{8}$，因为 $x_0=k\pi+\frac{3\pi}{8}>0$，所以 $k\in\mathbf{N}$，

又因为 $x_0=k\pi+\frac{3\pi}{8}\in(0,n)$ 且 $x_0+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{5\pi}{8}\in(0,n)(k\in N)$，

所以 $n>\frac{5\pi}{8}$，即所求 n 的取值范围是（$\frac{5\pi}{8}$，$+\infty$）．

证明：证明：（3）设 $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{3})$，$x\in[0,\frac{5}{3}]$，

则有 $g(0)=f(0)-f(\frac{1}{3})$，$g(\frac{1}{3})=f(\frac{1}{3})-f(\frac{2}{3})$，$g(\frac{2}{3})=f(\frac{2}{3})-f$（1），…，$g(\frac{k-1}{3})=f(\frac{k-1}{3})-f(\frac{k}{3})$，…，

$g(\frac{5}{3})=f(\frac{5}{3})-f$（2），$(k\in\{1,2,3,\ldots,6\})$，

以上各式相加得 $g(0)+g(\frac{1}{3})+\ldots+g(\frac{k-1}{3})+\ldots+g(\frac{5}{3})=f$（2）$-f(0)$，

即 $g(0)+g(\frac{1}{3})+\ldots+g(\frac{k-1}{3})+\ldots+g(\frac{5}{3})=0$，

(i) 当 $g(0)$、$g(\frac{1}{3})$、…、$g(\frac{n-1}{3})$、…、$g(\frac{5}{3})$ 中有一个为 0 时，不妨设 $g(\frac{i-1}{3})=0$，$i\in\{1，2，3，\ldots，6\}$，

即 $g(\frac{i-1}{3})=f(\frac{i-1}{3})-f(\frac{i}{3})=0$，即 $f(\frac{i-1}{3})=f(\frac{i-1}{3}+\frac{1}{3})$，$i\in\{1，2，3，\ldots，6\}$，

所以函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0，2]$ 上具有性质 $P(\frac{1}{3})$．

(ii) 当 $g(0)$、$g(\frac{1}{3})$、…、$g(\frac{n-1}{3})$、…、$g(\frac{5}{3})$ 中均不为 0 时，由于其和为 0，

则其中必存在整数和负数，不妨设 $g(\frac{i-1}{3})>0$，$g(\frac{j-1}{3})<0$，

其中 $i\neq j$，i，$j\in\{1，2，3，\ldots，6\}$，

由于函数 $y=g(x)$ 的图像是连续不断的曲线，所以当 $i<j$ 时，至少存在一个实数 $x_0\in(\frac{i-1}{3},\frac{j-1}{3})$（当 $i>j$ 时，至少存在一个实数 $x_0\in(\frac{j-1}{3},\frac{i-1}{3})$），

所以函数 $y=f(x)$ 在区间[0，2]上也具有性质 $P(\frac{1}{3})$，

综上所述，函数 $y=f(x)$ 在区间[0，2]上具有性质 $P(\frac{1}{3})$．

【点评】本题主要考查了新定义问题，考查了函数性质的应用，同时考查了学生分析问题和转化问题的能力，是中档题．

5．（2021 秋•崇明县期末）对于定义域为 D 的函数 $y=f(x)$，区间 $I\subseteq D$．若 $\{y|y=f(x)，x\in I\}=I$，则称 $y=f(x)$ 为 I 上的闭函数．若存在常数 $\alpha\in(0，1]$，对于任意的 x_1，$x_2\in I$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\alpha|x_1-x_2|$，则称 $y=f(x)$ 为 I 上的压缩函数．

（1）判断命题“函数 $f(x)=\sqrt{x}$（$x\in[0，1]$）既是闭函数，又是压缩函数”的真假，并说明理由；

（2）已知函数 $y=f(x)$ 是区间[0，1]上的闭函数，且是区间[0，1]上的压缩函数，求函数 $y=f(x)$ 在区间[0，1]上的解析式，并说明理由；

（3）给定常数 $k>0$，以及关于 x 的函数 $f(x)=|1-\frac{k}{x}|$，是否存在实数 a、b（$a<b$），使得 $y=f(x)$ 是区间 $[a，b]$ 上的闭函数，若存在，求出 a、b 的值，若不存在，说明理由．

【考点】命题的真假判断与应用．

【专题】分类讨论；函数思想；综合法；函数的性质及应用；逻辑推理；数学运算；数据分析．

【分析】（1）利用定义判断函数是闭函数，但是不是压缩函数，再判断得解；

（2）假设f（a）＝0，f（b）＝1，a，b∈[0，1]，$a≠b$利用两边夹的思想，求出a＝1，$|a-b|$＝1，然后分类讨论，利用反证法证明f（x）＝x，同理可得f（x）＝$1-x$；

（3）分类讨论，当$k≤a<b$时，利用函数的单调性建立方程，可得a，b是方程的两个根，由求根公式求解即可，当$a<b≤k$，$a<k<b$时，分析得到矛盾，故无解，即可得到答案．

【解答】解：（1）命题为假命题，

∵函数$f(x)=\sqrt{x}$，x∈[0，1]的值域是[0，1]，所以函数$f(x)=\sqrt{x}$，x∈[0，1]是闭函数．

当x_1＝x_2时，0≤α×0，存在常数α∈（0，1]，对于任意的x_1，x_2∈I，都有$|f(x_1)-f(x_2)|≤α|x_1-x_2|$；

当$x_1≠x_2$时，取x_1＝0，$x_2=\dfrac{1}{4}$，$|f(x_1)-f(x_2)|=\dfrac{1}{2},|x_1-x_2|=\dfrac{1}{4}$，

所以不存在常数α∈（0，1]，对于任意的x_1，x_2∈I，都有$|f(x_1)-f(x_2)|≤α|x_1-x_2|$，

即函数$f(x)=\sqrt{x}$（x∈[0，1]）不是压缩函数．

（2）因为函数y＝f（x）是[0，1]上的闭函数，所以$\{y|y=f(x)$，$x∈[0，1]\}$＝[0，1]，

设a，b∈[0，1]，f（a）＝0，f（b）＝1，则$1=|f(a)-f(b)|≤α|a-b|≤α≤1$，

所以α＝1，$|a-b|$＝1，所以$\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$，

当$\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$时，任取$x_0$∈（0，1），若$f$（$x_0$）＞$x_0$，则$|f(x_0)-f(0)|>|x_0-0|$，与函数$y$＝$f$（$x$）是[0，1]上的闭函数矛盾，

若f（x_0）＜x_0，则$|f(x_0)-f(1)|=1-f(x_0)>1-x_0=|x_0-1|$，与函数$y$＝$f$（$x$）是[0，1]上的闭函数矛盾，所以$f$（$x$）＝$x$；

同理，当$\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$时，$f$（$x$）＝$1-x$

综上所述，函数f（x）＝x或f（x）＝$1-x$．

（3）因为$f(x)=|1-\dfrac{k}{x}|≥0$，所以$0≤a<b$，

当a＝0时，函数值f（0）不存在，所以$a>0$，故$k<a<b$或$a<b<k$，

① 当 $k<a<b$ 时，$f(x)=1-\frac{k}{x}$，函数在区间[a，b]上单调递增，

所以$\begin{cases}f(a)=a\\f(b)=b\end{cases}$，所以 a，b 是$1-\frac{k}{x}=x$，即 $x^2-x+k=0$ 的两个根，

所以$\begin{cases}\triangle=1-4k>0\\1=a+b>2k\\ab=k>k^2(k>0)\end{cases}$，即$0<k<\frac{1}{4}$，此时$a=\frac{1-\sqrt{1-4k}}{2},b=\frac{1+\sqrt{1-4k}}{2}$；

②当 $a<b<k$ 时，$f(x)=\frac{k}{x}-1$，函数区间[a，b]上单调递减，

所以$\begin{cases}f(a)=\frac{k}{a}-1=b\\f(b)=\frac{k}{b}-1=a\end{cases}$，所以 $a=b$，与 $a<b$ 矛盾，

综上所述，当$0<k<\frac{1}{4}$，此时$a=\frac{1-\sqrt{1-4k}}{2},b=\frac{1+\sqrt{1-4k}}{2}$，当 $k\geq\frac{1}{4}$时，a，b 不存在.

【点评】解决此类问题，关键是读懂题意，理解新定义的本质，把新情境下的概念、法则、运算化归到常规的数学背景中，运用相关的数学公式、定理、性质进行解答即可.

Round　3　压轴挑战题

6．（2021 秋•松江区期末）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，若存在常数 k 和 A，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有$|f(x)-kx|\leq A$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为“拟线性函数”，其中数组（k，A）称为函数 $f(x)$ 的拟合系数.

（1）数组（2，1）是否是函数$g(x)=\frac{2x^3}{1+x^2}$的拟合系数？

（2）判断函数 $s(x)=x\sin x$ 是否是“拟线性函数”，并说明理由；

（3）若奇函数 $h(x)$ 在区间[0，p]（$p>0$）上单调递增，且 $h(x)$ 的图像关于点（p，q）成中心对称（其中 p，q 为常数），证明：$h(x)$ 是“拟线性函数”.

【考点】根据实际问题选择函数类型.

【专题】新定义；函数思想；综合法；函数的性质及应用；逻辑推理；直观想象；数学运算.

【分析】（1）根据所给新定义推出$|g(x)-2x|\leq 1$即可得出结论；

（2）根据新定义，利用特例法可知不存在（k，A）使$|s(x)-kx|\leq A$成立，即可得出结论；

（3）根据所给函数的性质可构造函数$H(x)=h(x)-\dfrac{q}{p}x$，利用周期定义可得$H(x)$为周期函数，先证明$H(x)$在$x\in[-p,p]$时，$|H(x)|\leq q$，再利用周期证明对一切$x\in\mathbf{R}$，都有$|H(x)|\leq q$即可得证．

【解答】解：（1）因为$g(x)-2x=\dfrac{2x^3}{1+x^2}-2x=-\dfrac{2x}{1+x^2}$，所以当$x=0$时，$g(x)-2x=0$，

当$x\neq 0$时，$g(x)-2x=-\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{-2}{\frac{1}{x}+x}$，

因为$\dfrac{1}{x}+x\geq 2$或$\dfrac{1}{x}+x\leq -2$，所以$|g(x)-2x|\leq 1$，

所以数组（2，1）是函数$g(x)=\dfrac{2x^3}{1+x^2}$的拟合系数；

（2）①当$x=\pi/2+2n\pi$（$n\in\mathbf{N}^*$）时，

$|s(x)-kx|=|\dfrac{\pi}{2}+2n\pi-k(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi)|\leq A$对于$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，

所以$k=1$成立，

②当$x=2n\pi$（$n\in\mathbf{N}^*$）时，$|s(x)-kx|=|2nk\pi|\leq A$恒成立，所以$k=0$成立，

由①②可知，k不能同时满足，

所以函数$s(x)=x\sin x$不是“拟线性函数”；

（3）$\because h(x)$的图像关于点（p，q）成中心对称，

$\therefore h(p+x)+h(p-x)=2q$，令$x=0$，得：$h(p)=q$，

由于$h(x)$在区间$[0,p]$（$p>0$）上单调递增，

$\therefore h(p)>h(0)$，$\therefore q>0$，

又$\because h(x)$为奇函数，$\therefore h(0)=0$，

$\therefore x\in[0,p]$时，$h(x)\in[0,q]$，

记 $H(x)=h(x)-\frac{q}{p}x$，下面证明对一切 $x\in\mathbf{R}$，都有 $|H(x)|\leqslant q$，

∵$h(x)$ 为奇函数，∴$h(-x)=-h(x)$，

∴$h(p+x)+h(p-x)=h(x+p)-h(x-p)=2q$，即 $h(x+2p)=h(x)+2q$，

由于 $H(x+2p)=h(x+2p)-\frac{q}{p}(x+2p)=[h(x)+2q]-\frac{q}{p}x-2q=h(x)-\frac{q}{p}x=H(x)$，

∴$H(x)$ 是周期函数，且一个周期为 $T=2p$，

因为当 $x\in[0,p]$时，$0\leqslant\frac{q}{p}x\leqslant q$，∴$\therefore -q\leqslant-\frac{q}{p}x\leqslant 0$，

又因此时 $0\leqslant h(x)\leqslant q$，

∴当 $x\in[0,p]$时，$H(x)=h(x)-\frac{q}{p}x\in[-q,q]$，∴$|H(x)|\leqslant q$，

由于 $y=h(x)$，$y=\frac{q}{p}x$ 均为奇函数，∴$H(x)$ 也为奇函数，

当 $x\in[-p,0]$时，$-x\in[0,p]$，

∴$|H(x)|=|H(-x)|\leqslant q$ 也成立，

综合得：当 $x\in[-p,p]$时，$|H(x)|\leqslant q$，

当 $x\in[(2n-1)p,(2n+1)p]$（$n\in\mathbf{Z}$）时，$x-2np\in[-p,p]$，

∴$|H(x)|=|H(x-2np)|\leqslant q$，

因此，对一切 $x\in\mathbf{R}$，都有 $|H(x)|\leqslant q$，即 $|h(x)-\frac{q}{p}x|\leqslant q$ 恒成立，

所以 $h(x)$ 是“拟线性函数”．

【点评】根据所给新定义，理解“拟线性函数”，并选取恰当的拟合系数是解题的关键所在，证明 $h(x)$ 是“拟线性函数”，需要根据所给函数的奇偶性，单调性，对称性进行充分推理，为探求拟合系数准备，找到合适的拟合系数（$\frac{q}{p}$，q），是解决问题的难点，探求出拟合系数后根据定义推导即可，属于难题．

7．（2021 秋•黄浦区期末）设函数 $y=f(x)$ 定义在区间（a，b）上，若对任意的 x_1、

x_2、x_1'、x_2'∈（a，b），当 $x_1+x_2=x_1'+x_2'$且$|x_1'-x_2'|<|x_1-x_2|$时，不等式 f（x_1）$+f$（x_2）$<f$（x_1'）$+f$（x_2'）成立，就称函数 $y=f$（x）具有 M 性质．

（1）判断函数 f（x）$=2^x$，x∈（﹣3，3）是否具有 M 性质，并说明理由；

（2）已知函数 $y=f$（x）在区间（a，b）上恒正，且函数 $y=lgf$（x），x∈（a，b）具有 M 性质，求证：对任意的 x_1、x_2∈（a，b），且 $x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\cdot f(x_2)<[f(\frac{x_1+x_2}{2})]^2$；

（3）①已知函数 $y=f$（x），x∈（a，b）具有 M 性质，证明：对任意的 x_1、x_2、x_3∈（a，b），有 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\bullet 3f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})$，其中等号当且仅当 $x_1=x_2=x_3$ 时成立；

②已知函数 f（x）$=\sin x$，x∈（0，$\frac{\pi}{2}$）具有 M 性质，若 A、B、C 为三角形 ABC 的内角，求 $\sin A+\sin B+\sin C$ 的最大值．

【考点】函数与方程的综合运用．

【专题】计算题；整体思想；演绎法；函数的性质及应用；逻辑推理；数学运算．

【分析】（1）取 $x_1=-2$，$x_2=2$，$x_1'=-1$，$x_2'=1$，进而检验不满足 M 性质的定义，进而判断；

（2）设 x_1，x_2∈（a，b）且 $x_1\neq x_2$，令 $x_{1'}=x_{2'}=\frac{x_1+x_2}{2}$，进而根据对数函数的单调性与 M 性质的定义证明即可；

（3）①，对任意的 x_1，x_2，x_3∈（a，b），令 $A=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$，$x_1'=A$，$x_2'=x_2$，$x_3'=x_1+x_3-A$，进而 $x_1+x_3=x_1'+x_3'$，且$|x_1'-x_3'|<|x_3-x_1|$，故 f（x_1）$+f$（x_2）$+f$（x_3）$<f$（x_1'）$+f$（x_2'）$+f$（x_3'），又 $x_2'+x_3'=A+A$，且$|x_2'-x_3'|\geqslant|A-A|$，

故 f（x_1'）$+f$（x_2'）$+f$（x_3'）$<f$（A）$+f$（A）$+f$（A）$=3f$（A），综合即可证明；

②分△ABC 是锐角三角形，直角三角形，钝角三角形时，结合①的结论求解即可．

【解答】（1）解：令 $x_1=-2$，$x_2=2$，$x_1'=-1$，$x_2'=1$，

此时 $f(x_1)+f(x_2)=2^{-2}+2^2=\frac{17}{4},f(x_{1'})+f(x_{2'})=2^{-1}+2^1=\frac{5}{2}$，

所以 f（x_1）$+f$（x_2）$>f$（x'_1）$+f$（x'_2），不满足 f（x_1）$+f$（x_2）$<f$（x'_1）$+f$（x'_2），

所以函数 f（x）$=2^x$，x∈（﹣3，3）不具有 M 性质．

（2）证明：设 x_1，x_2∈（a，b）且 $x_1 \neq x_2$，令 $x_{1'}=x_{2'}=\frac{x_1+x_2}{2}$，

显然 $\frac{x_1+x_2}{2}\in(a,b)$，且 $|x_1'-x_2'|=0<|x_1-x_2|$，

因为函数 $y=lgf(x)$，x∈（a，b）具有 M 性质，

所以 $1gf(x_1)+lgf(x_2)<f(x_1')+f(x_2')=2lgf(\frac{x_1+x_2}{2})$，即 $lgf(x_1)\cdot f(x_2)<lg[f(\frac{x_1+x_2}{2})]^2$，

因为函数 $y=lgx$ 在（0，+∞）上单调递增，

所以 $f(x_1)\cdot f(x_2)<[f(\frac{x_1+x_2}{2})]^2$.

（3）①证明：对任意的 x_1，x_2，x_3∈（a，b），令 $A=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$，显然 A∈（a，b），

令 $x_1'=A$，$x_2'=x_2$，$x_3'=x_1+x_3-A$，

所以 $x_1+x_3=x_1'+x_3'$，

且 $|x_1'-x_3'|=|A-(x_1+x_3-A)|=|-(x_3-A)+(A-x_1)|<|-(x_3-A)|+|A-x_1|=x_3-A+A-x_1=x_3-x_1$ $=|x_3-x_1|$，

所以 $f(x_1)+f(x_3)<f(x_1')+f(x_3')$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)<f(x_1')+f(x_2')+f(x_3')$，

又 $x_2'+x_3'=x_2+(x_1+x_3-A)=A+A$，

且 $|x_2'-x_3'|=|x_2-(x_1+x_3-A)|\geqslant 0=|A-A|$，

所以 $f(x_2')+f(x_3')\leqslant f(A)+f(A)$，

所以 $f(x_1')+f(x_2')+f(x_3')<f(A)+f(A)+f(A)=3f(A)$，

综上，$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\bullet 3f(\frac{x_1+x_2+x_3}{3})$，其中等号当且仅当 $x_1=x_2=x_3$ 时成立；

③ 解：当△ABC 是锐角三角形时，由① $\sin A+\sin B+\sin C\ \leq 3\sin(\frac{A+B+C}{3})\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当 $A=B=C$ 时成立；当△ABC 是直角三角形时，不妨设 C 为直角，

于是 $\sin A+\sin B+\sin C=\sin A+\cos A+1=\sqrt{2}\sin(A+\frac{\pi}{4})+1\bullet\sqrt{2}+1<\frac{3\sqrt{3}}{2}$；

当△ABC 是钝角三角形时，不妨设 C 为钝角，此时 $0<\pi-C<\frac{\pi}{2}$，

于是 $\sin A+\sin B+\sin C=\sin A+\sin B+\sin(\pi-C)\bullet 3\sin(\frac{A+B+\pi-C}{3})=3\sin\frac{2(\pi-C)}{3}$，

由于 $0<\pi-C<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\frac{2(\pi-C)}{3}<\frac{\pi}{3}$，所以 $0<\sin\frac{2(\pi-C)}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $0<3\sin\frac{2(\pi-C)}{3}<\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

综上，$\sin A+\sin B+\sin C$ 的最大值为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$．

【点评】本题主要考查函数方程及其应用，函数中的新定义问题等知识，属于难题．

8．（2021 秋•杨浦区期末 21）给定区间 I 和正常数 a，如果定义在 **R** 上的两个函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 满足：对一切 $x\in I$，均有 $|f(x)-g(x)|\leqslant a$，称函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 具有性质 $P(I, a)$．

（1）已知 $I=(0, +\infty)$，判断下列两组函数是否具有性质 $P(I, 2)$？①$f_1(x)=\frac{1}{x^2+1}$，$g_1(x)=2$；②$f_2(x)=x^2+x+1$，$g_2(x)=x^2-x+1$；（不需要说明理由）

（2）已知 $f(x)=0$，$y=g(x)$ 是周期函数，且对任意的 $a>0$，均存在区间 $I=(M, +\infty)$，使得函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 具有性质 $P(I, a)$，求证：$g(x)=0$；

（3）已知 $I=[1, m]$，$f(x)=x^2$，若存在一次函数 $y=g(x)$ 与 $y=f(x)$ 具有性质 $P(I, 1)$，求实数 m 的最大值．

【考点】函数与方程的综合运用．

【专题】函数思想；数形结合法；函数的性质及应用；逻辑推理；直观想象；数学运算．

【分析】（1）根据新定义直接检验；

（2）根据新定义用反证法证明；

（3）由新定义把问题转化为不等式恒成立问题，再转化两个函数图象间存在一条线段问题，结合直线与曲线相切从而求得结论．

【解答】解：（1）当 $x\in$（0，+∞）时，$1+x^2>1$，$0<\dfrac{1}{x^2+1}<1$，

所以 $1<2-\dfrac{1}{x^2+1}<2$，所以 $|f_1(x)-g_1(x)|<2$ 恒成立，

∴$f_1(x)$ 和 $g_1(x)$ 具有性质 $P(I，2)$；又 $|f_2(x)-g_2(x)|=|2x|=2x$，当 $x>1$ 时，$2x>2$，

因此 $f_2(x)$ 和 $g_2(x)$ 不具有性质 $P(I，2)$；

（2）证明：假设 $g(x)=0$ 不恒成立，即存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $g(x_0)=k\neq 0$，

又 $g(x)$ 是周期函数，设其最小正周期是 T，则 $x=x_0+nT$（$n\in\mathbf{Z}$）时，都有 $g(x)=k$，

取 $a\in(0，|k|)$，对任意的实数 M，取整数 n，满足 $n>\dfrac{M-x_0}{T}$，

则 $x=x_0+nT>M$，且 $g(x)=k$，此时 $|f(x)-g(x)|=|k|>a$，

与已知对任意的 $a>0$，均存在区间 $I=(M，+\infty)$，使得函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 具有性质 $P(I，a)$ 矛盾，

所以假设错误，所以 $g(x)=0$ 恒成立；

（3）设 $g(x)$ $ax+b$（$a\neq 0$），

由题意当 $x\in[1，m]$时，$|f(x)-g(x)|=|x^2-ax-b|\leqslant 1$ 恒成立，

所以 $x^2-1\leqslant ax+b\leqslant x^2+1$，

作出 $y=x^2-1$ 与 $y=x^2+1$ 在$[1，+\infty)$上的图象，如图，

题意说明在$[1，m]$上存在一条线段夹在这两个图象之间，

由图可知要使得 m 最大，则线段以（1，0）为端点，与 $y=x^2+1$ 相切，

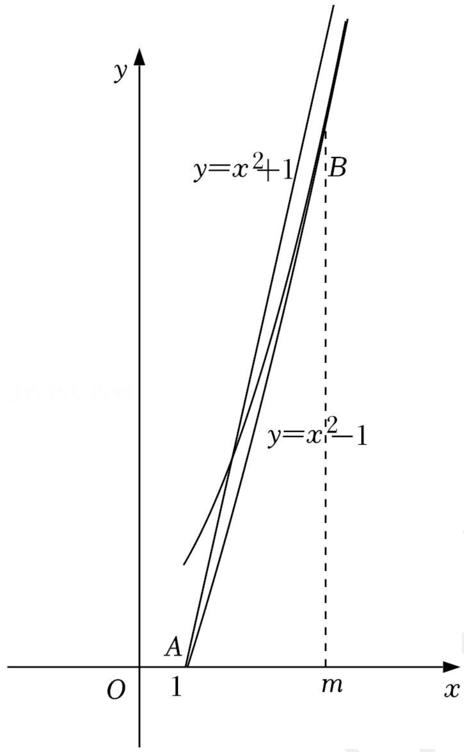
设线段所在直线方程为 $y=k(x-1)$，由 $\begin{cases}y=k(x-1)\\ y=x^2+1\end{cases}$ 得 $x^2-kx+k+1=0$，

$\Delta=k^2-4(k+1)=0$，$k=2+2\sqrt{2}$ 或 $k=2-2\sqrt{2}$（舍去），

由$\begin{cases} y=(2+2\sqrt{2})(x-1) \\ y=x^2-1 \end{cases}$，解得 $x=1+2\sqrt{2}$ 或 $x=1$（舍去），

此线段的另一端点 B 的横坐标为 $1+2\sqrt{2}$，即为 m 的最大值．

所以 m 的最大值为 $1+2\sqrt{2}$．



【点评】本题考查函数新定义，解题关键是理解新定义并应用新定义进行转化．难点是第（3）小题，利用新定义转化为两个函数图象间存在一条线段，这样由数形结合思想，再转化为求直线与曲线相切，由切线与另一曲线相交得出最大值，本题属于难题．