集合

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．（2023·上海宝山·统考一模）“$x>1$”是“$|x|>1$”的 （　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分也非必要条件

2．（2023·上海青浦·统考一模）已知a，$b\in R$，则“$a>b$”是“$a^3>b^3$”的（　）．

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分也非必要条件

3．（2023·上海金山·统考一模）设集合$A=\{1,2,\cdots,100\}$，X、Y均为A的非空子集（允许$X=Y$）．X中的最大元素与Y中的最小元素分别记为M、m，则满足$M>m$的有序集合对(X,Y)的个数为（　）．

A．$2^{200}-100\cdot 2^{100}$　B．$2^{200}-101\cdot 2^{100}$　C．$2^{201}-100\cdot 2^{100}$　D．$2^{201}-101\cdot 2^{100}$

4．（2023·上海嘉定·统考一模）已知四面体$ABCD, AB=BC, AD=CD$．分别对于下列三个条件：

①$AD\perp BC$；②$AC=BD$；③$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$，

是$AB\perp CD$的充要条件的共有几个（　）

A．0　B．1　C．2　D．3

5．（2023·上海青浦·统考一模）定义：如果曲线段C可以一笔画出，那么称曲线段C为单轨道曲线，比如圆、椭圆都是单轨道曲线；如果曲线段C由两条单轨道曲线构成，那么称曲线段C为双轨道曲线．对于曲线$\Gamma:\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=m(m>0)$有如下命题：$p$:存在常数$m$，使得曲线$\Gamma$为单轨道曲线；$q$:存在常数$m$，使得曲线$\Gamma$为双轨道曲线．下列判断正确的是（　）．

A．p和q均为真命题　　B．p和q均为假命题

C．p为真命题，q为假命题　　D．p为假命题，q为真命题

6．（2023·上海宝山·统考一模）已知集合S是由某些正整数组成的集合，且满足：若$a\in S$，则当且仅当$a=m+n$(其中$m,n\in S$且$m\neq n$)，或$a=p+q$(其中$p,q\notin S, p,q\in Z^*$且$p\neq q$).现有如下两个命题:①$4\in S$；②集合$\{x|x=3n+5,n\in N\}\subseteq S$.则下列选项中正确的是（　）

A．①是真命题，②是真命题；　　B．①是真命题，②是假命题

C．①是假命题，②是真命题；　　D．①是假命题，②是假命题.

7．（2023·上海徐汇·统考一模）已知数列$\{a_n\}$为无穷数列．若存在正整数l，使得对任意的正整数n，均有

$a_{n+l} \le a_n$，则称数列$\{a_n\}$为“l阶弱减数列”．有以下两个命题：①数列$\{b_n\}$为无穷数列且$b_n=\cos n-\frac{n}{2}$（n为正整数），则数列$\{b_n\}$是“l阶弱减数列”的充要条件是$l \ge 4$；②数列$\{c_n\}$为无穷数列且$c_n=an+\frac{1-q^n}{1-q}$（n为正整数），若存在$a \in \mathbf{R}$，使得数列$\{c_n\}$是“2阶弱减数列”，则$-1 \le q < 1$．那么（　　）

A．①是真命题，②是假命题　　B．①是假命题，②是真命题

C．①、②都是真命题　　D．①、②都是假命题

8．（2023·上海闵行·统考一模）已知函数$y=f(x)$的导函数为$y=f'(x)$，$x \in \mathbf{R}$，且$y=f'(x)$在$\mathbf{R}$上为严格增函数，关于下列两个命题的判断，说法正确的是（　　）

①“$x_1 > x_2$”是“$f(x_1+1)+f(x_2) > f(x_1)+f(x_2+1)$”的充要条件；

②“对任意$x<0$都有$f(x)<f(0)$”是“$y=f(x)$在$\mathbf{R}$上为严格增函数”的充要条件．

A．①真命题；②假命题　　B．①假命题；②真命题

C．①真命题；②真命题　　D．①假命题；②假命题

二、填空题

9．（2023·上海闵行·统考一模）已知集合$M=\{0,1,a+1\}$，若$-1 \in M$，则实数$a=$________．

10．（2023·上海青浦·统考一模）已知集合$A=[-2,3)$，$B=\{x \mid -1<x<6\}$，则$A \cap B=$_______．

11．（2023·上海长宁·统考一模）已知集合$A=(-\infty,4], B=\{1,3,5,7\}$，则$A \cap B=$__________．

12．（2023·上海徐汇·统考一模）已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$M=\{x \| x|>2\}$，则$\overline{M}=$________________．

13．（2023·上海奉贤·统考一模）设集合$A=\{-2,-1,0,5,10,20\}$，$B=\{x \mid \lg x<1\}$，则$A \cap B=$_____________．

14．（2023·上海杨浦·统考一模）已知全集为R，集合$A=(2,+\infty)$，则A的补集可用区间表示为$\overline{A}=$________．

15．（2023·上海长宁·统考一模）若“存在$x>0$，使得$x^2+ax+1<0$”是假命题，则实数a的取值范围__________．

16．（2023上·上海·高三上海市大同中学校考期中）已知$\triangle ABC$的三边长之比为5∶6∶9，记$\triangle ABC$的三个内角的正切值所组成的集合为M，则集合M中的最大元素为______．

17．（2023·上海普陀·统考一模）设集合$M=\{2,0,-1\}$，$N=\{x \| x-a|<1\}$，若$M \cap N$的真子集的个数是1，则正实数a的取值范围为______．

三、问答题

18．（2023·上海普陀·统考一模）设函数$y=f(x)$的表达式为$f(x)=ae^x+e^{-x}$．

(1)求证：“$a=1$”是“函数$y=f(x)$为偶函数”的充要条件；

(2)若 $a=1$，且 $f\left(m+2\right)\le f\left(2m-3\right)$，求实数 m 的取值范围.

集合

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．（2023·上海宝山·统考一模）“$x>1$”是“$|x|>1$”的　（　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分也非必要条件

【答案】A

【分析】根据不等式利用充分条件与必要条件的定义进行判断即可得出结论.

【详解】$x>1$可得$|x|>1$，则充分性成立，

$|x|>1$得出$x>1$或$x<-1$，则必要性不成立，

则“$x>1$”是“$|x|>1$”的充分非必要条件，

故选：A.

2．（2023·上海青浦·统考一模）已知a，$b\in\mathrm{R}$，则“$a>b$”是“$a^3>b^3$”的（　）.

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分也非必要条件

【答案】C

【分析】直接根据充分性和必要性的定义判断即可.

【详解】因为函数$y=x^3$在R上单调递增，

所以$a>b\Leftrightarrow a^3>b^3$，

即“$a>b$”是“$a^3>b^3$”的充要条件.

故选：C.

3．（2023·上海金山·统考一模）设集合$A=\{1,2,\cdots,100\}$，X、Y均为A的非空子集（允许$X=Y$）．X中的最大元素与Y中的最小元素分别记为M、m，则满足$M>m$的有序集合对(X,Y)的个数为（　）.

A．$2^{200}-100\cdot2^{100}$　B．$2^{200}-101\cdot2^{100}$　C．$2^{201}-100\cdot2^{100}$　D．$2^{201}-101\cdot2^{100}$

【答案】B

【分析】根据子集的个数，先求解$M\le m$的有序集合对(X,Y)的个数，然后用总个数减去即可求解.

【详解】对于给定的$M=\max X$,集合X是集合$\{1,2,\cdots,m-1\}$的任意一个子集与$\{m\}$的并，故有2^{m-1}种不同的取法，

又 $m=\min Y$，所以 $Y\{m,m+1,\cdots,100\}$ 的任意一个非空子集，共有 $2^{n+1-m}-1$ 种取法，

因此，满足 $M\le m$ 的有序集合对 (X,Y) 的个数为

$$\sum_{m=1}^{100}2^{m-1}\left(2^{100+1-m}-1\right)=\sum_{m=1}^{100}2^{100}-\sum_{m=1}^{100}2^{m-1}=100\times2^{100}-\frac{1-2^{100}}{1-2}=100\times2^{100}-2^{100}+1,$$

由于有序对 (X,Y) 有 $\left(2^{100}-1\right)\left(2^{100}-1\right)=\left(2^{100}-1\right)^2$ 个，

因此满足 $M>m$ 的有序集合对 (X,Y) 的个数为 $\left(2^{100}-1\right)^2-\left(100\times2^{100}-2^{100}+1\right)=2^{200}-101\cdot2^{100}$

故选：B

4．（2023·上海嘉定·统考一模）已知四面体 $ABCD,AB=BC,AD=CD$．分别对于下列三个条件：

① $AD\perp BC$；② $AC=BD$；③ $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$，

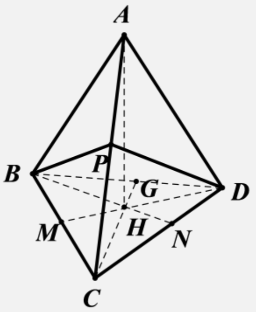
是 $AB\perp CD$ 的充要条件的共有几个（　）

A．0　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

【答案】C

【分析】根据题意，逐项分析判断即可.

【详解】



取线段 AC 中点 P，连接 BP,DP，

因为 $AB=BC,AD=CD$，

所以 $AC\perp BP,AC\perp DP$，

又 $BP\cap DP=P$，$BP\subset$ 平面 BDP，$DP\subset$ 平面 BDP，

所以 $AC\perp$ 平面 BDP，所以 $AC\perp BD$，

过 A 作 AH $\perp$ 平面 BCD，

连接 DH,BH,CH 并延长分别交 BC,CD,BD 于 M,N,G，

则 $AH\perp BD$，$AH\cap AC=A$，

所以 $BD\perp$ 平面 ACH，$CH\subset$ 平面 ACH，

所以 $BD\perp CH$，

对于①，若 $AD\perp BC$，又 $AD\perp AH$，$AH\cap AD=A$，

则 $BC\perp$ 平面 ADH，则 $BC\perp DH$，

所以点 H 为三角形 BCD 垂心，

则 $CD \perp BH$ ， 又 $CD \perp AH$ ，

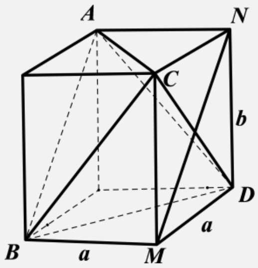
同理可知 $CD \perp$ 平面 ABH ， $AB \subset$ 平面 ABH ，

所以 $AB \perp CD$.

若已知 $AB \perp CD$， 同理可证 $AD \perp BC$ ，

所以 $AD \perp BC$ 是 $AB \perp CD$ 的充要条件，①正确；

对于②，在如图立方体中，设 $BM = MD = a, DN = b$ ，



则易知四面体 $ABCD, AB = BC, AD = CD$， 且 $AC = BD = \sqrt{2}a$ ，

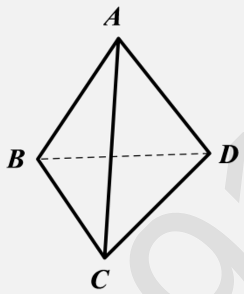
易知 $AB // MN$ ， 若使 $AB \perp CD$ 则需 $AB \perp MN$， 而在矩形 $NCMD$ 中，

当且仅当 $a = b$ 时， $AB \perp MN$ ，

所以在四面体 $ABCD, AB = BC, AD = CD$ 中， $AC = BD$ 不为 $AB \perp CD$ 的充要条件，

所以②错误；

对于③，在四面体 $ABCD, AB = BC, AD = CD$ 中，



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos\angle BAD - \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\angle BAC$$

$$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} - \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$$

$$= \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2} - \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{BC^2 + AD^2 - BD^2 - AC^2}{2}$$

因为 $AB = BC, AD = CD$ ，

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \dfrac{BC^2 + AD^2 - BD^2 - AC^2}{2} = \dfrac{AB^2 + CD^2 - BD^2 - AC^2}{2}$

所以若 $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，即 $AB\perp CD$，

若 $AB\perp CD$，即 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{AB^2+CD^2-BD^2-AC^2}{2}=0$，

则 $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$，

所以 $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$ 为 $AB\perp CD$ 的充要条件，③正确；

故选：C

5．（2023·上海青浦·统考一模）定义：如果曲线段 C 可以一笔画出，那么称曲线段 C 为单轨道曲线，比如圆、椭圆都是单轨道曲线；如果曲线段 C 由两条单轨道曲线构成，那么称曲线段 C 为双轨道曲线．对于曲线 $\Gamma:\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=m(m>0)$ 有如下命题：p：存在常数 m，使得曲线 Γ 为单轨道曲线；q：存在常数 m，使得曲线 Γ 为双轨道曲线．下列判断正确的是（　）．

A．p 和 q 均为真命题　　B．p 和 q 均为假命题

C．p 为真命题，q 为假命题　　D．p 为假命题，q 为真命题

【答案】A

【分析】根据方程确定研究曲线的性质，判断命题 p,q 的真假．

【详解】记 $f(x,y)=\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}-m$，

易得 $f(-x,y)=f(x,-y)=f(-x,-y)=f(x,y)=0$，因此曲线 $f(x,y)=0$ 关于 x 轴，y 轴成轴对称，关于原点成中心对称，

从几何上讲，曲线 Γ 是到两定点 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 的距离乘积为 m 的点的轨迹，

由 $f(x,y)=0$ 可得 $y=\pm\sqrt{\sqrt{4x^2+m^2}-x^2-1}$，因此它在 x 轴上方和下方分别是两个函数的图象，这两个函数图象在 x 轴上有公共点（方程 $y=0$ 的解相同），

由 $\sqrt{4x^2+m^2}-x^2-1\ge 0$ 得 $1-m\le x^2\le 1+m$，

$0<m<1$ 时，$-\sqrt{1+m}\le x\le-\sqrt{1-m}$ 或 $\sqrt{1-m}\le x\le\sqrt{1+m}$，

所以曲线 Γ 与 y 轴无公共点，曲线 Γ 是在 y 轴两侧的两个曲线构成，是双轨道曲线，

当 $m>1$ 时，$-\sqrt{1+m}\le x\le\sqrt{1+m}$，结合对称性知，曲线 Γ 是一个封闭曲线，是单轨道曲线，

（实际上上述过程中只要对 m 取一个特定值讨论即可）

命题 p,q 均正确，

故选：A．

【点睛】方法点睛：用方程确定曲线的性质，例如对称性，在曲线方程 $F(x,y)=0$ 中用 $-x$ 替换 x，方程不变，则曲线关于 y 轴对称，用 $-y$ 替换 y，方程不变，则曲线关于 x 轴对称，如果同时用 $-x$ 替换 x，$-y$ 替换 y，方程不变，则说明曲线关于原点对称，同样如果 x,y 互换后方程不变，曲线则关于直线 $y=x$ 对称等

等，通过方程中变量的变化范围得出曲线点的坐标的变化范围，即曲线的范围，由变量变化的趋势得出曲线的变化趋势.

6.（2023·上海宝山·统考一模）已知集合S是由某些正整数组成的集合，且满足：若$a\in S$，则当且仅当$a=m+n$(其中$m,n\in S$且$m\neq n$)，或$a=p+q$(其中$p,q\notin S, p,q\in Z^*$且$p\neq q$).现有如下两个命题: ①$4\in S$；②集合$\{x|x=3n+5,n\in N\}\subseteq S$.则下列选项中正确的是（　）

A．①是真命题，②是真命题；　　B．①是真命题，②是假命题

C．①是假命题，②是真命题；　　D．①是假命题，②是假命题.

【答案】C

【分析】根据集合S的定义即可判断①是假命题，根据集合S的定义先判断$5\in S$，$3n\in S$，再由$\forall x\in A$，有$x=3n+5$，$3n\in S$，$5\in S$且$3n\neq 5$，所以$x\in S$，可判断 ②是真命题.

【详解】因为若$a\in S$，则当且仅当$a=m+n$(其中$m,n\in S$且$m\neq n$)，或$a=p+q$(其中$p,q\notin S, p,q\in Z^*$且$p\neq q$)，

且集合S是由某些正整数组成的集合，

所以$1\notin S$，$2\notin S$，

因为$3=1+2$，满足$a=p+q$(其中$p,q\notin S, p,q\in Z^*$且$p\neq q$)，所以$3\in S$，

因为$4=1+3$，且$1\notin S$，$3\in S$，所以$4\notin S$，故①是假命题；

记$A=\{x|x=3n+5,n\in N\}$，

当$n=0$时，$5\in A$，因为$5=1+4$，$1\notin S$，$4\notin S$，所以$5\in S$；

下面讨论元素$3n(n\geq 1)$与集合S的关系，

当$n=1$时，$3\in S$，当$n=2$时，$6=2+4$，$2\notin S$，$4\notin S$，所以$6\in S$，

当$n=3$时，$9=3+6$，$3\in S$，$6\in S$，所以$9\in S$，

当$n=4$时，$12=3+9$，$3\in S$，$9\in S$，所以$12\in S$，依次类推，

当$n\geq 3$时，$3n=3+3(n-1)$，$3\in S$，$3(n-1)\in S$，所以$3n\in S$，

下面讨论$n\geq 1$时，集合A中元素与集合S的关系，

因为$\forall x\in A$，有$x=3n+5$，$3n\in S$，$5\in S$且$3n\neq 5$，所以$x\in S$，

综上所述，$\forall x\in A$，有$x\in S$，

即$\{x|x=3n+5,n\in N\}\subseteq S$，故②是真命题.

故选：C.

【点睛】关键点睛：本题解题的关键在于判断$1\notin S$，$2\notin S$，$3\in S$，$4\notin S$，再根据集合S的定义求解.

7.（2023·上海徐汇·统考一模）已知数列$\{a_n\}$为无穷数列．若存在正整数l，使得对任意的正整数n，均有$a_{n+l}\le a_n$，则称数列$\{a_n\}$为“l阶弱减数列”．有以下两个命题：①数列$\{b_n\}$为无穷数列且$b_n=\cos n-\frac{n}{2}$（n为正整数），则数列$\{b_n\}$是“l阶弱减数列”的充要条件是$l\ge 4$；②数列$\{c_n\}$为无穷数列且$c_n=an+\frac{1-q^n}{1-q}$（n为正整数），若存在$a\in\mathbf{R}$，使得数列$\{c_n\}$是“2阶弱减数列”，则$-1\le q<1$．那么（　）

A．①是真命题，②是假命题　　B．①是假命题，②是真命题

C．①、②都是真命题　　D．①、②都是假命题

【答案】C

【分析】对于①：根据“l阶弱减数列”的定义结合充分必要条件分析判断；对于②：分析可得$2a+q^n+q^{n+1}<0$对一切正整数n恒成立，分$|q|>1$、$q=-1$和$|q|<1$三种情况，分析求解.

【详解】对于①：因为$b_n=\cos n-\frac{n}{2}$，

若该数列$\{b_n\}$为“l弱减数列”，

因为$\frac{5\pi}{6}<3<\pi,\frac{11\pi}{6}<6<2\pi$，则$-1<\cos 3<-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos 6<1$，

可得$b_3-b_6=\left(\cos 3-\frac{3}{2}\right)-\left(\cos 6-\frac{6}{2}\right)=\cos 3-\cos 6+\frac{3}{2}<-\sqrt{3}+\frac{3}{2}<0$，即$b_3<b_6$，

同理可得$b_4<b_6,b_5<b_6$，所以$l\ge 4$；

当$l\ge 4$时，$b_{n+l}-b_n=\left[\cos(n+l)-\frac{n+l}{2}\right]-\left(\cos n-\frac{n}{2}\right)=\cos(n+l)-\cos n-\frac{l}{2}\le 2-\frac{l}{2}\le 0$，

所以该数列为“l弱减数列”；

综上所述：数列$\{b_n\}$是“l阶弱减数列”的充要条件是$l\ge 4$，故①是真命题；

对于②：因为$c_n=an+\frac{1-q^n}{1-q}$，显然$q\ne 1$，

若存在$a\in\mathbf{R}$使得数列$\{c_n\}$为“2阶弱减数列”，

则$c_{n+2}\le c_n$，即$a(n+2)+\frac{1-q^{n+2}}{1-q}\le an+\frac{1-q^n}{1-q}$，整理得$2a+q^n+q^{n+1}<0$，

所以$2a+q^n+q^{n+1}<0$对一切正整数n恒成立，

若$|q|>1$，当$a=0$时，当$q>1$，则$q^n+q^{n+1}>0$；

当$q<-1,n$为奇数，$q^n+q^{n+1}=q^n(1+q)>0$；

可知$a=0$不合题意，所以$a\ne 0$，

则 $q^2>1,1+q^{-1}=\dfrac{q+1}{q}>0$，

当 $n=2m-1,m>\log_{q^2}\dfrac{2|a|}{1+q^{-1}}$ 时，

则 $q^{n+1}=q^{2m}=\left(q^2\right)^m>\left(q^2\right)^{\log_{q^2}\frac{2|a|}{1+q^{-1}}}=\dfrac{2|a|}{1+q^{-1}}$，

可得 $2a+q^n+q^{n+1}=2a+q^{n+1}\left(1+q^{-1}\right)>2a+2|a|\ge 0$，不合题意；

若 $q=-1$，取 $a<0$，则 $2a+q^n+q^{n+1}=2a+q^n(1+q)=2a<0$，符合题意；

若 $|q|<1$，则 $-1<q^n,q^{n+1}<1$，则 $-2<q^n+q^{n+1}<2$，

取 $a\le -1$，则 $2a+q^n+q^{n+1}<2a+2\le 0$，符合题意；

综上所述：存在 $a\in\mathbf{R}$，使得数列 $\{c_n\}$ 是"2 阶弱减数列"，则 $-1\le q<1$．故②是真命题.

故选：C.

【点睛】方法点睛：对于新定义问题时，可以通过举例或转化法理解新定义，进而根据新定义分析求解.

8.（2023·上海闵行·统考一模）已知函数 $y=f(x)$ 的导函数为 $y=f'(x)$，$x\in\mathbf{R}$，且 $y=f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为严格增函数，关于下列两个命题的判断，说法正确的是（　）

①"$x_1>x_2$"是"$f(x_1+1)+f(x_2)>f(x_1)+f(x_2+1)$"的充要条件；

②"对任意 $x<0$ 都有 $f(x)<f(0)$"是"$y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为严格增函数"的充要条件.

A．①真命题；②假命题　　B．①假命题；②真命题

C．①真命题；②真命题　　D．①假命题；②假命题

【答案】C

【分析】对于①，构造函数 $g(x)=f(x+1)-f(x)$，结合题设，判断"$x_1>x_2$"和"$f(x_1+1)+f(x_2)>f(x_1)+f(x_2+1)$"之间的逻辑推理关系，可判断其真假；对于②，结合函数单调性，判断必要性；采用反证思想，结合题设推出矛盾，说明充分性成立，判断②的真假.

【详解】对于①：

设 $g(x)=f(x+1)-f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $g'(x)=f'(x+1)-f'(x)$，

因为 $y=f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为严格增函数，故 $f'(x+1)>f'(x)$，

即 $g'(x)=f'(x+1)-f'(x)>0$，则 $g(x)=f(x+1)-f(x)$ 在 R 上单调递增，

由于 $x_1>x_2$，故 $g(x_1)>g(x_2)$，即 $f(x_1+1)-f(x_1)>f(x_2+1)-f(x_2)$。

即 $f(x_1+1)+f(x_2)>f(x_1)+f(x_2+1)$；

当 $f(x_1+1)+f(x_2)>f(x_1)+f(x_2+1)$ 成立时，即 $f(x_1+1)-f(x_1)>f(x_2+1)-f(x_2)$，

由于 $g(x)=f(x+1)-f(x)$ 在 R 上单调递增，故 $x_1>x_2$，

故“$x_1>x_2$”是“$f(x_1+1)+f(x_2)>f(x_1)+f(x_2+1)$”的充要条件，①为真命题；

对于②，当 $y=f(x)$ 在 **R** 上为严格增函数时，由对任意 $x<0$，则都有 $f(x)<f(0)$ 成立；

当对任意 $x<0$ 都有 $f(x)<f(0)$ 时，假设 $y=f(x)$ 在 **R** 上不为严格增函数，

即 $f'(x)$ 不恒大于等于 0，即 $\exists a$，使得 $f'(a)<0$，

由于 $y=f'(x)$ 在 **R** 上为严格增函数，故 $x\in(-\infty,a]$ 时，$f'(x)<0$，

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上单调递减，且其图象为一个严格递减的凹型曲线，

故当 x 趋近于负无穷时，$f(x)$ 的值将趋近于正无穷大，

这与对任意 $x<0$ 都有 $f(x)<f(0)$ 矛盾，

则假设不成立，即“$y=f(x)$ 在 **R** 上为严格增函数”成立，

即“对任意 $x<0$ 都有 $f(x)<f(0)$”是“$y=f(x)$ 在 **R** 上为严格增函数”的充要条件，②为真命题，

故选：C

【点睛】关键点睛：解答本题的关键是判断②中命题的充分性成立，解答时采用反证思想，推得矛盾，说明充分性成立.

二、填空题

9．（2023·上海闵行·统考一模）已知集合 $M=\{0,1,a+1\}$，若 $-1\in M$，则实数 $a=$________.

【答案】-2

【分析】利用元素与集合的关系可得出关于 a 的等式，解之即可.

【详解】因为集合 $M=\{0,1,a+1\}$，若 $-1\in M$，则 $a+1=-1$，解得 $a=-2$.

故答案为：-2.

10．（2023·上海青浦·统考一模）已知集合 $A=[-2,3)$，$B=\{x\mid -1<x<6\}$，则 $A\cap B=$_______.

【答案】$(-1,3)$

【分析】根据集合间的运算直接得解.

【详解】由 $A=[-2,3)$， $B=\{x\mid -1<x<6\}=(-1,6)$，

得 $A\cap B=(-1,3)$，

故答案为：$(-1,3)$.

11．（2023·上海长宁·统考一模）已知集合 $A=(-\infty,4],B=\{1,3,5,7\}$，则 $A\cap B=$__________.

【答案】$\{1,3\}$

【分析】根据集合的交集运算求解.

【详解】由题意可得：$A\cap B=\{1,3\}$.

故答案为：$\{1,3\}$.

12．（2023·上海徐汇·统考一模）已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x\|x|>2\}$，则 $\overline{M}=$_______________.

【答案】$[-2,2]$

【分析】根据补集的定义直接进行运算即可.

【详解】因为 $M=\{x\|x|>2\}$，

所以 $\bar{M}=\{x\|x|\le 2\}=\{x\mid -2\le x\le 2\}$，

故答案为：$[-2,2]$.

13．（2023·上海奉贤·统考一模）设集合 $A=\{-2,-1,0,5,10,20\}$， $B=\{x|\lg x<1\}$，则 $A\cap B=$_____________.

【答案】$\{5\}$

【分析】先求出集合 B，然后求解 $A\cap B$.

【详解】由题意得 $A=\{-2,-1,0,5,10,20\}$， $B=\{x|0<x<10\}$，

所以 $A\cap B=\{5\}$.

故答案为：$\{5\}$.

14．（2023·上海杨浦·统考一模）已知全集为R，集合 $A=(2,+\infty)$，则A的补集可用区间表示为 $\overline{A}=$________.

【答案】$(-\infty,2]$

【分析】根据补集的概念直接求解出结果.

【详解】因为全集为R， 集合 $A=(2,+\infty)$，

所以 $\overline{A}=(-\infty,2]$，

故答案为：$(-\infty,2]$.

15．（2023·上海长宁·统考一模）若“存在 $x>0$，使得 $x^2+ax+1<0$”是假命题，则实数 a 的取值范围__________.

【答案】$[-2,+\infty)$

【分析】由题意可得：“任意 $x>0$，使得 $x^2+ax+1\geq 0$”是真命题，参变分离结合基本不等式运算求解.

【详解】由题意可得：“任意 $x>0$，使得 $x^2+ax+1\geq 0$”是真命题，

注意到 $x>0$，整理得 $x+\frac{1}{x}\geq -a$，

原题意等价于“任意 $x>0$，使得 $x+\frac{1}{x}\geq -a$”是真命题，

因为 $x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，等号成立，

所以 $2\geq -a$，解得 $a\geq -2$，

所以实数 a 的取值范围 $[-2,+\infty)$.

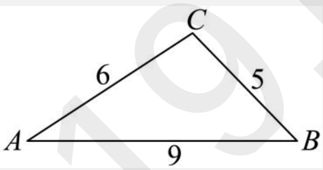
故答案为：$[-2,+\infty)$.

16．（2023上·上海·高三上海市大同中学校考期中）已知 $\triangle ABC$ 的三边长之比为5∶6∶9，记 $\triangle ABC$ 的三个内角的正切值所组成的集合为 M，则集合 M 中的最大元素为______.

【答案】$\frac{4\sqrt{2}}{7}$/$\frac{4}{7}\sqrt{2}$

【分析】首先得出 $0<A<B<\frac{\pi}{2}<C<\pi$，再结合余弦定理以及平方关系、商数关系即可求解.

【详解】如图所示：



不失一般性，不妨分别设 $AB=9,BC=5,CA=6$，则由余弦定理有

$$\cos C=\frac{CB^2+CA^2-AB^2}{2CB\cdot CA}=\frac{5^2+6^2-9^2}{2\times5\times6}=-\frac{1}{3}<0,$$

故 C 是钝角，A,B 是锐角，

则由大边对大角可得 $A<B<C$，所以 $0<A<B<\frac{\pi}{2}<C<\pi$，

又函数 $y=\tan x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上递增，此时 $\tan x>0$，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上递增，此时 $\tan x<0$，

所以三个内角的正切值最大为 $\tan B$，

$\cos B=\dfrac{AB^2+CB^2-AC^2}{2CB\cdot AB}=\dfrac{5^2+9^2-6^2}{2\times5\times9}=\dfrac{7}{9}$， $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$, $\tan B=\dfrac{\sin B}{\cos B}=\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$，

所以集合 M 中的最大元素为 $\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$.

故答案为：$\dfrac{4\sqrt{2}}{7}$.

17．（2023·上海普陀·统考一模）设集合 $M=\{2,0,-1\}$， $N=\{x\,||x-a|<1\}$，若 $M\cap N$ 的真子集的个数是 1，则正实数 a 的取值范围为______.

【答案】$(0,1)\cup(1,3)$

【分析】分 $M\cap N=\{0\}$ 和 $M\cap N=\{2\}$ 讨论即可.

【详解】$N=\{x\,||x-a|<1\}$，则 $-1<x-a<1$，解得 $-1+a<x<1+a$，

若 $M\cap N$ 的真子集的个数是 1，则 $M\cap N$ 中只含有一个元素，

因为 a 为正实数，则 $1+a>1$， $-1+a>-1$，

若 $M\cap N=\{0\}$，则 $\begin{cases}-1+a<0\\1+a\le 2\\a>0\end{cases}$，解得 $0<a<1$，

若 $M\cap N=\{2\}$，则 $\begin{cases}0\le -1+a<2\\1+a>2\\a>0\end{cases}$，解得 $1<a<3$，

综上所述， a 的取值范围为 $(0,1)\cup(1,3)$.

故答案为：$(0,1)\cup(1,3)$.

三、问答题

18．（2023·上海普陀·统考一模）设函数 $y=f(x)$ 的表达式为 $f(x)=ae^x+e^{-x}$.

(1)求证：“$a=1$”是“函数 $y=f(x)$ 为偶函数”的充要条件；

(2)若 $a=1$，且 $f(m+2)\le f(2m-3)$，求实数 m 的取值范围.

【答案】(1)证明见解析；

(2) $m\le\dfrac{1}{3}$ 或 $m\ge 5$.

【分析】（1）根据给定条件，利用偶函数的定义、结合充要条件的意义推理即得.

（2）利用偶函数性质及在$[0,+\infty)$的单调性求解不等式即可.

【详解】（1）函数$f\left(x\right)=ae^{x}+e^{-x}$的定义域为R，$e^{x}-e^{-x}$不恒为0，

函数$y=f\left(x\right)$为偶函数$\Leftrightarrow \forall x\in R, f(-x)-f(x)=0$

$\Leftrightarrow \forall x\in R, ae^{-x}+e^{x}-(ae^{x}+e^{-x})=0 \Leftrightarrow \forall x\in R,(1-a)(e^{x}-e^{-x})=0 \Leftrightarrow a=1$，

所以“$a=1$”是“函数$y=f\left(x\right)$为偶函数”的充要条件.

（2）当$a=1$时，$f(x)=e^{x}+e^{-x}$，求导得$f'(x)=e^{x}-e^{-x}$，函数$f'(x)$在R上单调递增，

当$x>0$时，$f'(x)>f'(0)=0$，即函数$f(x)=e^{x}+e^{-x}$在$[0,+\infty)$单调递增，又$f(x)$是偶函数，

因此$f(m+2)\le f(2m-3)\Leftrightarrow f(|m+2|)\le f(|2m-3|)\Leftrightarrow |m+2|\le|2m-3|$，

即$(m-5)(3m-1)\ge 0$，解得$m\le\frac{1}{3}$或$m\ge 5$，

所以实数m的取值范围是$m\le\frac{1}{3}$或$m\ge 5$.