函数（三大类型题）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、函数及其性质，17 题

1．（2023·上海杨浦·统考一模）函数 $y=f\left(x\right)$ 满足：对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f\left(x\right)=f\left(a^{x}\right)$，（常数 $a>0$，$a\neq1$）. 给出以下两个命题：①无论 a 取何值，函数 $y=f\left(x\right)$ 不是 $\left(0,+\infty\right)$ 上的严格增函数；②当 $0<a<1$ 时，存在无穷多个开区间 $I_1,I_2,\cdots,I_n,\cdots$，使得 $I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$，且集合 $\left\{y|\ y=f(x),x\in I_n\right\}=\left\{y|\ y=f(x),x\in I_{n+1}\right\}$ 对任意正整数 n 都成立，则（　　）

A．①②都正确　　B．①正确②不正确　　C．①不正确②正确　　D．①②都不正确

2．（2023·上海奉贤·统考一模）函数 $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 在定义域 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上是（　　）

A．严格增的奇函数　　B．严格增的偶函数

C．严格减的奇函数　　D．严格减的偶函数

3．（2023·上海崇明·统考一模）若存在实数 a,b，对任意实数 $x\in[0,1]$，使得不等式 $x^3-m\leqslant ax+b\leqslant x^3+m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$\left[\dfrac{\sqrt{3}}{9},+\infty\right)$　　B．$\left[\dfrac{8\sqrt{3}}{9},+\infty\right)$　　C．$\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$　　D．$\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$

4．（2023·上海金山·统考一模）若函数 $f\left(x\right)=\left|(1-x^2)(x^2+ax+b)\right|-c(c\neq0)$ 的图像关于直线 $x=-2$ 对称，且该函数有且仅有 7 个零点，则 $a+b+c$ 的值为________.

5．（2023·上海长宁·统考一模）设 $f\left(x\right)=\left|\log_2x+ax+b\right|(a>0)$，记函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left[t,t+1\right](t>0)$ 上的最大值为 $M_t\left(a,b\right)$，若对任意 $b\in\mathbf{R}$，都有 $M_t\left(a,b\right)\geq\dfrac{a}{2}+1$，则实数 t 的最大值为__________.

6．（2023·上海青浦·统考一模）已知函数 $y=\begin{cases}x^2-2x+2,x\geq0\\ x+\dfrac{a}{x}+3a,x<0\end{cases}$ 的值域为 R，则实数 a 的取值范围为____________.

7．（2023·上海嘉定·统考一模）已知等差数列 $\left\{a_n\right\}$，公差为 d，$f\left(x\right)=\left|x-a_1\right|+\left|x-a_2\right|$，则下列命题正确的是（　　）

A．函数 $y=f\left(x\right)\left(x\in\mathbf{R}\right)$ 可能是奇函数

B．若函数 $y=f\left(x\right)\left(x\in\mathbf{R}\right)$ 是偶函数，则 $d=0$

C．若 $d=0$，则函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数

D．若 $d\neq 0$，则函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的图象是轴对称图形

8．（2023·上海徐汇·统考一模）已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=\left|\dfrac{2^{x+1}}{2^{x}+2^{-x}}-1-a\right|$，存在实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使得 $\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)=f(x_n)$ 成立，若正整数 n 的最大值为 8，则实数 a 的取值范围是________．

9．（2023·上海杨浦·统考一模）函数 $y=|x-3|+|5-x|$ 的最小值为________．

10．（2023 上·上海松江·高三统考期末）若函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的不恒为零的偶函数，且对任意实数 x 都有 $x\cdot f(x+2)=(x+2)\cdot f(x)+2$，则 $f(2023)=$________．

11．（2023 上·上海浦东新·高三统考期末）已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=\dfrac{4^{x}+k}{2^{x}}(k\in\mathrm{R})$．

(1)是否存在实数 k，使函数 $y=f(x)$ 是奇函数？若存在，请写出证明．

(2)当 $k=1$ 时，若关于 x 的不等式 $f(x)\geq a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

12．（2023·上海杨浦·统考一模）设函数 $f(x)=x+A\sin\dfrac{\pi x}{2}$，$x\in\mathbf{R}$（其中常数 A Î R，$A>0$），无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：首项 $a_1>0$，$a_{n+1}=f(a_n)$．

(1)判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

(2)若数列 $\{a_n\}$ 是严格增数列，求证：当 $A<4$ 时，数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列；

(3)当 $A=8$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是否可能为公比小于 0 的等比数列？若可能，求出所有公比的值；若不可能，请说明理由．

13．（2023 上·上海松江·高三统考期末）为了鼓励居民节约用气，某市对燃气收费实行阶梯计价，普通居民燃气收费标准如下：

第一档：年用气量在 $0-310$（含）立方米，价格为 a 元/立方米；

第二档：年用气量在 $310-520$（含）立方米，价格为 b 元/立方米；

第三档：年用气量在 520 立方米以上，价格为 c 元/立方米．

(1)请写出普通居民的年度燃气费用（单位：元）关于年度的燃气用量（单位：立方米）的函数解析式（用含 a,b,c 的式子表示）；

(2)已知某户居民 2023 年部分月份用气量与缴费情况如下表，求 a,b,c 的值．

月份	1	2	3	4	5	9	10	12

当月燃气用量（立方米）	56	80	66	58	60	53	55	63
当月燃气费（元）	168	240	198	174	183	174.9	186	264.6

14．（2023·上海徐汇·统考一模）若函数 $y=f(x),x\in\mathbf{R}$ 的导函数 $y=f'(x),x\in\mathbf{R}$ 是以 $T(T\neq 0)$ 为周期的函数，则称函数 $y=f(x),x\in\mathbf{R}$ 具有“T 性质”.

(1)试判断函数 $y=x^2$ 和 $y=\sin x$ 是否具有“2π 性质”，并说明理由；

(2)已知函数 $y=h(x)$，其中 $h(x)=ax^2+bx+2\sin bx(0<b<3)$ 具有“π 性质”，求函数 $y=h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的极小值点；

(3)若函数 $y=f(x),x\in\mathbf{R}$ 具有“T 性质”，且存在实数 $M>0$ 使得对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $|f(x)|<M$ 成立，求证：$y=f(x),x\in\mathbf{R}$ 为周期函数.

（可用结论：若函数 $y=f(x),x\in\mathbf{R}$ 的导函数满足 $f'(x)=0,x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)=C$（常数）.）

15．（2023 上·上海虹口·高三统考期末）已知 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 都是定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数，若对任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $g(x_1)\leq\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leq g(x_2)$，则称 $y=g(x)$ 是 $y=f(x)$ 的一个“控制函数”.

(1)判断 $y=2x$ 是否为函数 $y=x^2(x>0)$ 的一个控制函数，并说明理由；

(2)设 $f(x)=\ln x$ 的导数为 $f'(x)$，$0<a<b$，求证：关于 x 的方程 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x)$ 在区间 (a,b) 上有实数解；

(3)设 $f(x)=x\ln x$，函数 $y=f(x)$ 是否存在控制函数？若存在，请求出 $y=f(x)$ 的控制函数；若不存在，请说明理由.

16.（2023·上海长宁·统考一模）若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 满足：对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，都有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\geq\left|g(x_1)-g(x_2)\right|$，则称函数 $y=f(x)$ 是函数 $y=g(x)$ 的"约束函数".已知函数 $y=f(x)$ 是函数 $y=g(x)$ 的"约束函数".

(1)若 $f(x)=x^2$，判断函数 $y=g(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

(2)若 $f(x)=ax+x^3(a>0),g(x)=\sin x$，求实数 a 的取值范围；

(3)若 $y=g(x)$ 为严格减函数，$f(0)<f(1)$，且函数 $y=f(x)$ 的图像是连续曲线，求证：$y=f(x)$ 是 $(0,1)$ 上的严格增函数.

17.（2023·上海金山·统考一模）设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，给定区间 $[a,b]\subseteq D$，若存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则称函数 $y=f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的"均值函数"，x_0 为函数 $y=f(x)$ 的"均值点".

(1)试判断函数 $y=x^2$ 是否为区间 $[1,2]$ 上的"均值函数"，如果是，请求出其"均值点"；如果不是，请说明理由；

(2)已知函数 $y=-2^{2x-1}+m\cdot 2^{x-1}-12$ 是区间 $[1,3]$ 上的"均值函数"，求实数 m 的取值范围；

(3)若函数 $y=\dfrac{x^2+a}{2(x^2-2x+2)}$（常数 $a\in\mathbf{R}$）是区间 $[-2,2]$ 上的"均值函数"，且 $\dfrac{2}{3}$ 为其"均值点".将区间 $[-2,0]$ 任意划分成 $m+1$（$m\in\mathrm{N}$）份，设分点的横坐标从小到大依次为 $t_1,t_2,\cdots,t_m$，记 $t_0=-2$，$t_{m+1}=0$，$G=\sum\limits_{i=0}^{m}|f(t_{i+1})-f(t_i)|$.再将区间 $[0,2]$ 等分成 2^n+1（$n\in\mathbf{N}$）份，设等分点的横坐标从小到大依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_{2^n}$，记 $H=\sum\limits_{i=1}^{2^n}f(x_i)$.求使得 $H\cdot G>2023$ 的最小整数 n 的值.**二、指对数函数，8 题**

18.（2023·上海杨浦·统考一模）等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\dfrac{1}{64}$，公比为 q，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\log_{0.5}a_n$（n 是正整数），若当且仅当 $n=4$ 时，$\{b_n\}$ 的前 n 项和 B_n 取得最大值，则 q 取值范围是（　）

A．$(3,2\sqrt{3})$　　B．$(3,4)$　　C．$(2\sqrt{2},4)$　　D．$(2\sqrt{2},3\sqrt{2})$

19.（2023·上海崇明·统考一模）若 $x>y>0$，则下列不等式正确的是（　）

A．$|x|<|y|$　　B．$x^2<y^2$　　C．$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$　　D．$\dfrac{x+y}{2}\leqslant\sqrt{xy}$

20.（2023·上海青浦·统考一模）已知 a，$b\in\mathrm{R}$，则"$a>b$"是"$a^3>b^3$"的（　）.

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分也非必要条件

21．（2023·上海闵行·统考一模）已知 a，$b\in\mathrm{R}$，$a>b$，则下列不等式中不一定成立的是（　）

A．$a+2>b+2$　B．$2a>2b$　C．$a^2>b^2$　D．$2^a>2^b$

22．（2023上·上海松江·高三统考期末）已知 $\lg a+\lg b=1$，则 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 的最小值为________

23．（2023上·上海虹口·高三统考期末）函数 $y=\lg(x-2)+\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$ 的定义域为________.

24．（2023·上海宝山·统考一模）已知函数 $f(x)=(x+1)^3+1$，正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{1012}=\dfrac{1}{10}$，则 $\sum\limits_{k=1}^{2023}f(\lg a_k)$

25．（2023·上海杨浦·统考一模）设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)求方程 $(f(x))^2=f(x)+2$ 的实数解；

(2)若不等式 $x+b\le f(x)$ 对于一切 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，求实数 b 的取值范围.

三、函数的应用，6题

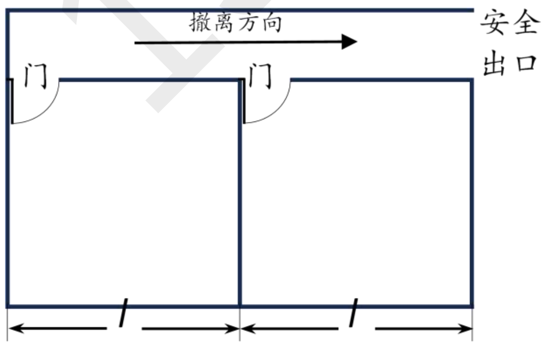
26．（2023·上海青浦·统考一模）若函数 $y=\cos(x+\phi)$ 是奇函数，则该函数的所有零点是________.

27．（2023上·上海虹口·高三统考期末）设 $a\in\mathbf{R}$，若关于 x 的方程 $2x|x|-(a-2)x+|x|-a+1=0$ 有 3 个不同的实数解，则实数 a 的取值范围为________.

28．（2023·上海长宁·统考一模）在有声世界，声强级是表示声强度相对大小的指标.其值 y（单位：dB）定义为 $y=10\lg\dfrac{I}{I_0}$.其中 I 为声场中某点的声强度，其单位为 $\mathrm{W/m^2}$，$I_0=10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$ 为基准值.若 $I=10\,\mathrm{W/m^2}$，则其相应的声强级为__________dB.

29．（2023·上海徐汇·统考一模）函数 $y=\lg(2x+1)+\lg x$ 的零点是______________.

30．（2023·上海青浦·统考一模）上海各中学都定期进行紧急疏散演习：当警报响起，建筑物内师生马上有组织、尽快地疏散撤离．对于一个特定的建筑物，管理人员关心房间内所有人疏散完毕（房间最后一个人到达安全出口处）所用时间．数学建模小组准备对某教学楼第一层楼两间相同的教室展开研究．为此，他们提出如下模型假设：



1.疏散时所有人员有秩序地撤离建筑物；

2.所有人员排成单列行进撤离；

3.队列中人员的间隔是均匀的；

4.队列匀速地撤离建筑物．

(1)上述模型假设是否合理，请任选两个模型假设说明理由；

(2)如图，设第一间教室（图中右）的人数为n_1+1，第二间教室（图中左）的人数为n_2+1，每间教室的长度为l，其中n_1，n_2都是正整数，$l>0$，忽略教室门的宽度及忽略教室内人群到教室门口的时间．请再引入适当的变量，建立两个教室内的人员完全撤离所用时间的数学模型．31．（2023·上海宝山·统考一模）已知函数$f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x$，$g\left(x\right)=\mathrm{e}^{-x}+x$，其中e为自然对数的底数.

(1)求函数$y=f\left(x\right)$的图象在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程；

(2)设函数$F\left(x\right)=af\left(x\right)-g\left(x\right)$，

①若$a=\mathrm{e}$，求函数$y=F\left(x\right)$的单调区间，并写出函数$y=F\left(x\right)-m$有三个零点时实数m的取值范围；

②当$0<a<1$时，x_1、x_2分别为函数$y=F\left(x\right)$的极大值点和极小值点，且不等式$F\left(x_1\right)+tF\left(x_2\right)>0$对任意$a\in\left(0,1\right)$恒成立，求实数$t$的取值范围.

函数（三大类型题）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、函数及其性质，17 题

1．（2023·上海杨浦·统考一模）函数 $y=f(x)$ 满足：对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)=f\left(a^{x}\right)$，（常数 $a>0$，$a\neq1$）．给出以下两个命题：①无论 a 取何值，函数 $y=f(x)$ 不是 $(0,+\infty)$ 上的严格增函数；②当 $0<a<1$ 时，存在无穷多个开区间 $I_1,I_2,\cdots,I_n,\cdots$，使得 $I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$，且集合 $\{y|\ y=f(x),x\in I_n\}=\{y|\ y=f(x),x\in I_{n+1}\}$ 对任意正整数 n 都成立，则（　）

A．①②都正确　　B．①正确②不正确　　C．①不正确②正确　　D．①②都不正确

【答案】A

【分析】对于①，由题得 $f(1)=f(a)$，然后反证法推出矛盾即可；对于②令 $I_1=(0,1)$，然后根据 $f(x)=f\left(a^{x}\right)$ 分别得出 $I_2,\cdots,I_n,\cdots$，判断为正确.

【详解】对于①：由题得 $f(1)=f(a)$，若函数 $y=f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的严格增函数，因为 $a>0$，$a\neq1$，则当 $a>1$ 时，$f(1)<f(a)$，当 $0<a<1$ 时，$f(1)>f(a)$，均与 $f(1)=f(a)$ 矛盾，所以无论 a 取何值，函数 $y=f(x)$ 不是 $(0,+\infty)$ 上的严格增函数，故①正确；

对于②：因为对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)=f\left(a^{x}\right)$，令 $I_1=(0,1)$，当 $x\in I_1=(0,1)$ 时，$a^{x}\in(a,1)=I_2\subset(0,1)$，

且 $\{y|\ y=f(x),x\in I_1\}=\{y|\ y=f(x),x\in I_2\}$，

当 $x\in I_2=(a,1)$ 时，$a^{x}\in(a,a^{a})=I_3\subset I_2$，且 $\{y|\ y=f(x),x\in I_2\}=\{y|\ y=f(x),x\in I_3\}$，

当 $x\in I_3=(a,a^{a})$ 时，$a^{x}\in(a^{a^{a}},a^{a})=I_4\subset I_3$，且

$\{y|\ y=f(x),x\in I_3\}=\{y|\ y=f(x),x\in I_4\}$，

以此类推，故当 $0<a<1$ 时，存在无穷多个开区间 $I_1,I_2,\cdots,I_n,\cdots$，使得 $I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$，且集合 $\{y|\ y=f(x),x\in I_n\}=\{y|\ y=f(x),x\in I_{n+1}\}$ 对任意正整数 n 都成立，故②正确，

故选：A.

2．（2023·上海奉贤·统考一模）函数 $y=\dfrac{2^{x}-1}{2^{x}+1}$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上是（　　）

A．严格增的奇函数　　B．严格增的偶函数

C．严格减的奇函数　　D．严格减的偶函数

【答案】A

【分析】根据题意，分别判断函数奇偶性以及单调性，即可得到结果.

【详解】令 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$，任取 $x_1<x_2\in\mathbf{R}$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2^{x_1}-1}{2^{x_2}+1}-\dfrac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1}=\dfrac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$，

因为 $y=2^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的严格增函数，所以 $2^{x_1}<2^{x_2}$，

则 $\dfrac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}<0$，所以 $f(x_1)<f(x_2)$，

则函数 $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的严格增函数；

又 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\dfrac{\frac{1-2^x}{2^x}}{\frac{1+2^x}{2^x}}=\dfrac{1-2^x}{2^x+1}=-f(x)$，即函数 $f(x)$ 为奇函数，

所以函数 $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格增的奇函数.

故选：A

3．（2023·上海崇明·统考一模）若存在实数 a,b，对任意实数 $x\in[0,1]$，使得不等式 $x^3-m\leqslant ax+b\leqslant x^3+m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$\left[\dfrac{\sqrt{3}}{9},+\infty\right)$　　B．$\left[\dfrac{8\sqrt{3}}{9},+\infty\right)$　　C．$\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$　　D．$\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$

【答案】A

【分析】不等式 $x^3-m\le ax+b\le x^3+m$ 等价于 $\left|-x^3+ax+b\right|\le m$，原命题等价于存在实数 a，b，对任意实数 $x\in[0,1]$ 不等式 $\left|-x^3+ax+b\right|\le m$ 恒成立，等价于存在实数 a，b，不等式 $\left|-x^3+ax+b\right|_{\max}\le m$ 成立，分别讨论 $a\le 0$，$0<a\le 1$，$1<a<3$，$a\ge 3$ 的情况，先求出 $\left|-x^3+ax+b\right|_{\max}$，再求出 $\left(\left|-x^3+ax+b\right|_{\max}\right)_{\min}$ 即可解决问题.

【详解】不等式 $x^3-m\le ax+b\le x^3+m$ 等价于 $-m\le -x^3+ax+b\le m$ 即 $\left|-x^3+ax+b\right|\le m$，

原命题等价于存在实数 a，b，对任意实数 $x\in[0,1]$ 不等式 $\left|-x^3+ax+b\right|\le m$ 恒成立，

等价于存在实数 a，b，不等式 $\left|-x^3+ax+b\right|_{\max}\le m$ 成立，

记 $f(x)=-x^3+ax+b$，则 $f'(x)=-3x^2+a$，

（1）当 $a\le 0$ 时，对任意 $x\in[0,1]$， $f'(x)\le 0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减 $a+b-1\le f(x)\le b$

①当 $a+b-1+b\ge 0$，即 $b\ge\frac{1-a}{2}$ 时， $|f(x)|_{\max}=b$，

②当 $a+b-1+b<0$，即 $b<\frac{1-a}{2}$ 时， $|f(x)|_{\max}=-a-b+1$，

从而当 $a\le 0$ 时， $g(b)=\begin{cases}b & ,b\ge\frac{1-a}{2}\\ -a-b+1 & ,b<\frac{1-a}{2}\end{cases}$，

则 $g(b)$ 在 $(-\infty,\frac{1-a}{2})$ 上单调递减，在 $\left[\frac{1-a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(b)_{\min}=g(\frac{1-a}{2})=\frac{1-a}{2}\ge\frac{1}{2}$；

（2）当 $0<a<3$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{\frac{a}{3}}$，

$f(x)$ 在区间 $\left[0,\sqrt{\frac{a}{3}}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\sqrt{\frac{a}{3}},1\right]$ 上单调递减，

$f(0)=b$， $f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b$， $f(1)=a+b-1$，

①当 $0<a\le 1$ 时 $a+b-1\le b$，此时 $a+b-1\le f(x)\le\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b$，

$\alpha)$ 当 $a+b-1+\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b<0$ 即 $b<\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$ 时， $|f(x)|_{\max}=-a-b+1$，

$\beta)$ 当 $a+b-1+\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b\ge 0$ 即 $b\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$ 时， $|f(x)|_{\max}=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b$，

从而当 $0<a\le 1$ 时， $g(b)=\begin{cases}-2a-b+8 & ,b<\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\\ \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b & ,b\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\end{cases}$，

则 $g(b)$ 在区间 $\left(-\infty,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(b)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-\frac{a}{6}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{a}{2}+\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$；

令 $t=\sqrt{\frac{a}{3}}$，则 $0<t\le\sqrt{\frac{1}{3}}$， $g(b)_{\min}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t^2+t^3$，记 $h(t)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t^2+t^3$，

则 $h'(t)=3t^2-3t)=3t(t-1)$，

当 $\left(0,\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ 时， $h'(t)<0$ 恒成立，

即 $h(t)$ 在区间 $\left(0,\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ 上单调递减，即 $h(t)_{\min}=h\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}$，

即 $g(b)_{\min}\geq\frac{\sqrt{3}}{9}$；

②当 $1<a<3$ 时 $a+b-1>b$，此时 $b\leq f(x)\leq\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b$，

$\alpha)$ 当 $b+\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b<0$ 即 $b<-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$ 时，$|f(x)|_{\max}=-b$，

$\beta)$ 当 $b+\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b\geq0$ 即 $b\geq-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$ 时，$|f(x)|_{\max}=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b$，

从而当 $1<a<3$ 时，$g(b)=\begin{cases}-b & ,b<-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\\ \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b & ,b\geq-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\end{cases}$，

则 $g(b)$ 在区间 $\left(-\infty,-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left[-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(b)_{\min}=g\left(-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}>\frac{\sqrt{3}}{9}$；

（3）当 $a\geq3$ 时，对任意 $x\in[0,1]$，$f'(x)\geq0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

$b\leq f(x)\leq a+b-1$

①当 $a+b-1+b\geq0$，即 $b\geq\frac{1-a}{2}$ 时，$|f(x)|_{\max}=a+b-1$，

②当 $a+b-1+b<0$，即 $b<\frac{1-a}{2}$ 时，$|f(x)|_{\max}=-b$，

从而当 $a\geq3$ 时，$g(b)=\begin{cases}2a+b-8 & ,b\geq\frac{1-a}{2}\\ -b & ,b<\frac{1-a}{2}\end{cases}$，

则 $g(b)$ 在 $(-\infty,\frac{1-a}{2})$ 上单调递减，在 $\left[\frac{1-a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(b)_{\min}=g(\frac{1-a}{2})=\frac{a-1}{2}\geq1$；

综上所述，$g(b)_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{9}$，

所以 $m\geq\frac{\sqrt{3}}{9}$.

故选：A

【点睛】结论点睛：本题考查不等式的恒成立与有解问题，可按如下规则转化：

一般地，已知函数 $y=f\left(x\right),x\in\left[a,b\right]$，$y=g\left(x\right),x\in\left[c,d\right]$

（1）若 $\forall x_1\in\left[a,b\right]$，$\forall x_2\in\left[c,d\right]$，总有 $f\left(x_1\right)<g\left(x_2\right)$ 成立，故 $f\left(x_1\right)_{\max}<g\left(x_2\right)_{\min}$；

（2）若 $\forall x_1\in[a,b]$，$\exists x_2\in[c,d]$，有 $f(x_1)<g(x_2)$ 成立，故 $f(x_1)_{\max}<g(x_2)_{\max}$；

（3）若 $\exists x_1\in[a,b]$，$\exists x_2\in[c,d]$，有 $f(x_1)<g(x_2)$ 成立，故 $f(x_1)_{\min}<g(x_2)_{\min}$；

（4）若 $\forall x_1\in[a,b]$，$\exists x_2\in[c,d]$，有 $f(x_1)=g(x_2)$，则 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 值域的子集 .

4．（2023·上海金山·统考一模）若函数 $f(x)=\left|(1-x^2)(x^2+ax+b)\right|-c(c\neq 0)$ 的图像关于直线 $x=-2$ 对称，且该函数有且仅有 7 个零点，则 $a+b+c$ 的值为________.

【答案】32

【分析】根据题意，求得 $g(x)=\left|(1-x^2)(x^2+ax+b)\right|$ 的图形过点 $(1,0),(-1,0)$，得到 $g(x)$ 的图象过点 $(-3,0),(-5,0)$，结合 $g(-1)=g(-3)$，$g(1)=g(-5)$，联立方程组，求得 a,b 的值，得出 $f(x)=\left|(1-x^2)(x^2+8x+15)\right|-c$，再根据题意，得到 $x=-2$ 必为函数 $y=f(x)$ 的一个零点，结合 $f(-2)=0$，求得 c 的值，即可求解.

【详解】由函数 $f(x)=\left|(1-x^2)(x^2+ax+b)\right|-c$，

则函数 $g(x)=\left|(1-x^2)(x^2+ax+b)\right|$ 的图形过点 $(1,0),(-1,0)$，

因为函数 $g(x)$ 的图象关于 $x=-2$ 对称，则函数 $g(x)$ 的图象过点 $(-3,0),(-5,0)$，

可得 $g(-1)=0,g(-3)=\left|(1-9)(9-3a+b)\right|$，且 $g(-1)=g(-3)$，可得 $9-3a+b=0$，

又由 $g(1)=0,g(-5)=\left|(1-25)(25-5a+b)\right|$，且 $g(1)=g(-5)$，可得 $25-5a+b=0$，

联立方程组 $\begin{cases}9-3a+b=0\\25-5a+b=0\end{cases}$，解得 $a=8,b=15$，

所以 $g(x)=\left|(1-x^2)(x^2+8x+15)\right|$，

因为函数 $y=f(x)$ 图像关于直线 $x=-2$ 对称，且该函数有且仅有 7 个零点，

则 $x=-2$ 必为函数 $y=f(x)$ 的一个零点，即 $f(-2)=0$，

可得 $\left|(1-4)(4-8\times 2+15)\right|-c=0$，解得 $c=9$，

所以 $a+b+c=32$.

故答案为：32.

5．（2023·上海长宁·统考一模）设 $f(x)=\left|\log_2 x+ax+b\right|(a>0)$，记函数 $y=f(x)$ 在区间 $[t,t+1](t>0)$ 上的最大值为 $M_t(a,b)$，若对任意 $b\in\mathbf{R}$，都有 $M_t(a,b)\geq\frac{a}{2}+1$，则实数 t 的最大值为__________.

【答案】$\frac{1}{3}$

【分析】根据 $y=\log_2 x+ax+b$ 在 $[t,t+1](t>0)$ 内单调递增，分析可知 $f(t)\geq \frac{a}{2}+1$ 或 $f(t+1)\geq \frac{a}{2}+1$，整理得关于 b 的不等式 $b\leq -\log_2 t-at-\frac{a}{2}-1$ 或 $b\geq -\log_2(t+1)-at-\frac{a}{2}+1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，可得 $-\log_2(t+1)-at-\frac{a}{2}+1\leq -\log_2 t-at-\frac{a}{2}-1$，运算求解即可.

【详解】因为 $a>0$，则 $y=\log_2 x, y=ax+b$ 在 $[t,t+1](t>0)$ 内单调递增，

则 $y=\log_2 x+ax+b$ 在 $[t,t+1](t>0)$ 内单调递增，

又因为 $f(x)=|\log_2 x+ax+b|$ 在区间 $[t,t+1](t>0)$ 上的最大值为 $M_t(a,b)$，

可得 $M_t(a,b)=f(t)$ 或 $M_t(a,b)=f(t+1)$，

由题意可知：$f(t)\geq \frac{a}{2}+1$ 或 $f(t+1)\geq \frac{a}{2}+1$，

则 $-(\log_2 t+at+b)\geq \frac{a}{2}+1$ 或 $\log_2(t+1)+a(t+1)+b\geq \frac{a}{2}+1$，

整理得 $b\leq -\log_2 t-at-\frac{a}{2}-1$ 或 $b\geq -\log_2(t+1)-at-\frac{a}{2}+1$，

即关于 b 的不等式 $b\leq -\log_2 t-at-\frac{a}{2}-1$ 或 $b\geq -\log_2(t+1)-at-\frac{a}{2}+1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，

可知 $-\log_2(t+1)-at-\frac{a}{2}+1\leq -\log_2 t-at-\frac{a}{2}-1$，

整理得 $\log_2(t+1)-\log_2 t=\log_2\left(1+\frac{1}{t}\right)\geq 2$，则 $1+\frac{1}{t}>4$，

又因为 $t>0$，解得 $0<t\leqslant\frac{1}{3}$，所以 t 的最大值为 $\frac{1}{3}$.

故答案为：$\frac{1}{3}$.

【点睛】方法点睛：恒成立问题解题方法指导：

方法 1：分离参数法求最值.

(1)分离变量．构造函数，直接把问题转化为函数的最值问题.

(2) $a\geq f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a\geq f(x)_{\max}$；

$a\leq f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a\leq f(x)_{\min}$；

$a\geq f(x)$ 能成立 $\Leftrightarrow a\geq f(x)_{\min}$；

$a\leq f(x)$ 能成立 $\Leftrightarrow a\leq f(x)_{\max}$.

方法 2：根据不等式恒成立构造函数转化成求函数的最值问题，一般需讨论参数范围，借助函数单调性求解.

6．（2023·上海青浦·统考一模）已知函数 $y=\begin{cases}x^2-2x+2,x\geq 0\\ x+\dfrac{a}{x}+3a,x<0\end{cases}$ 的值域为R，则实数 a 的取值范围为____________.

【答案】$(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

【分析】先求解出 $x\geq 0$ 时 $f(x)$ 的值域，然后根据 $a=0,a>0,a<0$ 分类讨论 $x<0$ 时 $f(x)$ 的值域，由此确定出 a 的取值范围.

【详解】当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$，此时 $f(x)\in[1,+\infty)$，

当 $a=0$ 且 $x<0$ 时，$f(x)=x$，

此时 $f(x)\in(-\infty,0)$，且 $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)\neq\mathbf{R}$，所以不满足；

当 $a>0$ 且 $x<0$ 时，$f(x)=x+\dfrac{a}{x}+3a$，

由对勾函数单调性可知 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\sqrt{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\sqrt{a},0\right)$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f\left(-\sqrt{a}\right)=3a-2\sqrt{a}$，此时 $f(x)\in\left(-\infty,3a-2\sqrt{a}\right]$，

若要满足 $f(x)$ 的值域为R，只需要 $3a-2\sqrt{a}\geq 1$，解得 $a\geq 1$；

当 $a<0$ 且 $x<0$ 时，因为 $y=x,y=\dfrac{a}{x}$ 均在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

所以 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+3a$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，且 $x\to 0$ 时，$f(x)\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，

所以此时 $f(x)\in(-\infty,+\infty)$，此时显然能满足 $f(x)$ 的值域为R；

综上可知，a 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$，

故答案为：$(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$.

7．（2023·上海嘉定·统考一模）已知等差数列 $\{a_n\}$，公差为 d，$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|$，则下列命题正确的是（　）

A．函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 可能是奇函数

B．若函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数，则 $d=0$

C．若 $d=0$，则函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数

D．若 $d\neq 0$，则函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的图象是轴对称图形

【答案】D

【分析】利用 $f(0)=0$ 可判断 A；举反例可判断 BC；求出 $f(a_1-x)=f(a_2+x)$ 可判断 D.

【详解】对于 A，若函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是奇函数，则 $f(0)=|0-a_1|+|0-a_2|=0$，

可得 $a_1=a_2=0$，所以 $a_n=0$，此时 $f(x)=2|x|$，$f(-x)=2|x|=f(x)$，

此时函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数，故 A 错误；

对于 B，当 $a_n=2n-3$ 时，$a_1=-1,a_2=1$，所以 $f(x)=|x+1|+|x-1|$，

$f(-x)=|-x+1|+|-x-1|=|x-1|+|x+1|=f(x)$，函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是偶函数，

则 $d=2\neq0$，故 B 错误；

对于 C，若 $a_n=1$，则 $d=0$，则 $f(x)=2|x-1|$，所以 $f(-x)=2|-x-1|=2|x+1|$，

则 $f(-x)\neq f(x)$，所以函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 不是偶函数，故 C 错误；

对于 D，若 $d\neq0$，则 $f(a_1-x)=|a_1-x-a_1|+|a_1-x-a_2|=|x|+|d+x|$，

$f(a_2+x)=|a_2+x-a_1|+|a_2+x-a_2|=|x+d|+|x|$，所以 $f(a_1-x)=f(a_2+x)$，

所以函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的图象关于 $x=\dfrac{a_1+a_2}{2}$ 对称，是轴对称图形，故 D 正确.

故选：D.

8.（2023·上海徐汇·统考一模）已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=\left|\dfrac{2^{x+1}}{2^x+2^{-x}}-1-a\right|$，存在实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}f(x_i)=f(x_n)$ 成立，若正整数 n 的最大值为 8，则实数 a 的取值范围是________.

【答案】$\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{9}{7}\right]\cup\left[\dfrac{9}{7},\dfrac{4}{3}\right)$

【分析】设 $g(x)=\dfrac{2^{x+1}}{2^x+2^{-x}}-1$，得到 $-1-a<g(x)-a<1-a$，然后分类讨论 a 的范围，解出即可.

【详解】设 $g(x)=\dfrac{2^{x+1}}{2^x+2^{-x}}-1=1-\dfrac{2}{(2^x)^2+1}$，

又因为 $(2^x)^2>0,(2^x)^2+1>1$，

所以 $-1<g(x)<1$，

则 $-1-a<g(x)-a<1-a$，

当 $0\le a\le1$ 时，$-1-a\le-1,0\le1-a\le1$，

则 $0\le f(x)\le a+1$，

显然存在任意正整数n使得$\sum\limits_{i=1}^{n-1}f(x_i)=f(x_n)$成立；

当$a>1$时，$-1-a<1-a<0$，

$a-1<f(x)<a+1$，

要使得正整数n的最大值为8，则

$\begin{cases}7(a-1)<a+1\\8(a-1)\geq a+1\end{cases}$，解得$\frac{9}{7}\leq a<\frac{4}{3}$，

当$-1\leq a<0$时，$-1<-1-a<0,1-a>1$，

$0\leq f(x)<1-a$，

显然存在任意整数n使得$\sum\limits_{i=1}^{n-1}f(x_i)=f(x_n)$成立；

当$a<-1$时，$0<-1-a<1-a$，

$-a-1<f(x)<1-a$，

要使得正整数n的最大值为8，则

$\begin{cases}-7(a+1)<1-a\\-8(a+1)\geq 1-a\end{cases}$，解得$-\frac{4}{3}<a\leq-\frac{9}{7}$，

综上，则实数a的取值范围是$\left(-\frac{4}{3},-\frac{9}{7}\right]\cup\left[\frac{9}{7},\frac{4}{3}\right)$.

故答案为：$\left(-\frac{4}{3},-\frac{9}{7}\right]\cup\left[\frac{9}{7},\frac{4}{3}\right)$.

9.（2023·上海杨浦·统考一模）函数$y=|x-3|+|5-x|$的最小值为________.

【答案】2

【分析】将函数写成分段函数形式，再结合分段函数的单调性，可得最小值.

【详解】由已知$y=|x-3|+|5-x|=\begin{cases}-2x+8,x<3\\2,3\leq x<5\\2x-8,x\geq 5\end{cases}$，

所以当$x\in(-\infty,3)$时，函数$y=|x-3|+|5-x|$单调递减，且$y>2$，

当$x\in[5,+\infty)$时，函数$y=|x-3|+|5-x|$单调递增，且$y\geq 2$，

当$x\in[3,5)$时，$y=|x-3|+|5-x|=2$，

所以函数$y=|x-3|+|5-x|$的最小值为2，

故答案为：2.

10.（2023上·上海松江·高三统考期末）若函数$y=f(x)$是定义在R上的不恒为零的偶函数，且对任意实数

x 都有 $x\cdot f(x+2)=(x+2)\cdot f(x)+2$ ，则 $f(2023)=$________.

【答案】-1

【分析】利用赋值法，结合累加法求解.

【详解】函数 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的不恒为零的偶函数，则 $f(-x)=-f(x)$ ，

$x\cdot f(x+2)=(x+2)\cdot f(x)+2$中，令 $x=-1$ ，得 $-f(1)=f(-1)+2$ ，

则 $-f(1)=f(1)+2$ ，得 $f(1)=-1$ ，

当 $x>0$ 时，由 $x\cdot f(x+2)=(x+2)\cdot f(x)+2$ ，得 $\dfrac{f(x+2)}{x+2}=\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{2}{x(x+2)}$ ，

即 $\dfrac{f(x+2)}{x+2}-\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+2}$ ，

$\therefore \dfrac{f(2023)}{2023}=\dfrac{f(2023)}{2023}-\dfrac{f(2021)}{2021}+\dfrac{f(2021)}{2021}-\dfrac{f(2019)}{2019}+\cdots+\dfrac{f(3)}{3}-\dfrac{f(1)}{1}+\dfrac{f(1}{1}$

$=\dfrac{1}{2021}-\dfrac{1}{2023}+\dfrac{1}{2019}-\dfrac{1}{2021}+\cdots+\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{-1}{1}=-\dfrac{1}{2023}+\dfrac{1}{1}+\dfrac{-1}{1}=-\dfrac{1}{2023}$ ，

$\therefore f(2023)=2023\times\left(-\dfrac{1}{2023}\right)=-1$.

故答案为：-1.

11.（2023 上·上海浦东新·高三统考期末）已知函数 $y=f(x)$，其中 $f(x)=\dfrac{4^x+k}{2^x}(k\in\mathrm{R})$.

(1)是否存在实数 k ，使函数 $y=f(x)$ 是奇函数？若存在，请写出证明.

(2)当 $k=1$ 时，若关于 x 的不等式 $f(x)\geq a$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $k=-1$ ，证明见解析

(2) $(-\infty,2]$

【分析】（1） $f(x)$ 是奇函数，利用 $f(0)=0$ 解出 k 并检验即可.

（2）利用基本不等式求 $f(x)$ 的最小值解决恒成立问题.

【详解】（1）函数 $f(x)=\dfrac{4^x+k}{2^x}$ 定义域为 **R**，若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(0)=1+k=0$ ，解得 $k=-1$ ，

此时 $f(x)=\dfrac{4^x-1}{2^x}=2^x-2^{-x}$ ， $f(-x)=2^{-x}-2^x=-\left(2^x-2^{-x}\right)=-f(x)$ ，符合题意，

故 $k=-1$.

（2）当 $k=1$ 时， $f(x)=\dfrac{4^x+1}{2^x}=2^x+\dfrac{1}{2^x}$ ，

由 $2^x>0$ ，则 $2^x+\dfrac{1}{2^x}\geq 2\sqrt{2^x\cdot\dfrac{1}{2^x}}=2$ ，当且仅当 $2^x=\dfrac{1}{2^x}$ ，即 $x=0$ 时等号成立，

所以 $f(x)\geq 2$ ，又不等式 $f(x)\geq a$ 恒成立，得 $a\leq 2$ ，

则实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,2\right]$.

12.（2023·上海杨浦·统考一模）设函数 $f\left(x\right)=x+A\sin\frac{\pi x}{2}$，$x\in\mathbf{R}$（其中常数 $A\in R$，$A>0$），无穷数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：首项 $a_1>0$，$a_{n+1}=f\left(a_n\right)$.

(1)判断函数 $y=f\left(x\right)$ 的奇偶性，并说明理由；

(2)若数列 $\left\{a_n\right\}$ 是严格增数列，求证：当 $A<4$ 时，数列 $\left\{a_n\right\}$ 不是等差数列；

(3)当 $A=8$ 时，数列 $\left\{a_n\right\}$ 是否可能为公比小于 0 的等比数列？若可能，求出所有公比的值；若不可能，请说明理由.

【答案】(1)奇函数，理由见解析

(2)见解析

(3)存在公比为负数的无穷等比数列 $\{a_n\}$，其公比只能是 -1

【分析】（1）利用奇偶性的定义即可判定；

（2）反证法，假设假设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差为 d，然后结合等差数列的性质推出矛盾；

（3）根据递推关系得到 a_n 与 q 的关系，讨论公比与 -1 的大小关系，然后根据等比数列的性质即可得出答案.

【详解】（1）任取 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)=-x+A\sin\left(-\frac{\pi x}{2}\right)=-x-A\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=-f(x)$，

因此函数 $y=f(x)$ 是奇函数.

（2）反证法：假设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差为 d，

由数列 $\{a_n\}$ 是严格增数列可知 $d>0$.

因为 $a_{n+1}=a_n+A\sin\frac{\pi a_n}{2}$，所以 $A\sin\frac{\pi a_n}{2}=d$，即 $\sin\frac{\pi a_n}{2}=\frac{d}{A}=$ 非零常数

因为 $\sin\frac{\pi a_1}{2}=\sin\frac{\pi\left(a_1+d\right)}{2}=\sin\frac{\pi\left(a_1+2d\right)}{2}=\cdots\neq 0$，

所以 $d=4k$（其中 k 是正整数）.

因为 $d\geq 4$，$0<A<4$，所以 $\frac{d}{A}>1$. 方程 $\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{d}{A}$ 无解，矛盾.

假设不成立，即当 $A<4$ 时，数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列.

（3）若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，则其各项均非零，设其公比为 q

由 $a_{n+1}=a_n+8\sin\frac{\pi a_n}{2}$ 得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{8}{a_n}\sin\frac{\pi a_n}{2}$，即 $\sin\frac{\pi a_n}{2}=\frac{a_n}{8}(q-1)$.

考虑方程 $\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{q-1}{8}x$，$a_n$ 均为该方程（记为①）的解.

由函数 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$ 的值域为 $[-1,1]$ 可知 $\left|\frac{q-1}{8}x\right|\le 1$，即 $|x|\le\frac{8}{|q-1|}$，

所以 $|a_n|\le\frac{8}{|q-1|}$. 若 $q<-1$，则当 n 充分大时（$n>\log_{|q|}\frac{8}{a_1|q-1|}+1$ 时），

$|a_n|>\frac{8}{|q-1|}$，这与 $|a_n|\le\frac{8}{|q-1|}$ 矛盾，从而不合题意.

若 $-1<q<0$，函数 $y=\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{q-1}{8}x$ 在 $[-1,1]$ 是严格增函数

由 $x=0$ 时 $y=0$，可知函数当 $x\in[-1,0)\cup(0,1]$ 时，均有 $y\neq 0$，

因此函数的零点（即方程①的解）的绝对值均大于 1，即 $|a_n|>1$.

但若 $-1<q<0$，由 $|a_n|=a_1|q|^{n-1}$，则当 n 充分大时（$n>1+\log_{|q|}\frac{1}{a_1}$ 时），

将有 $|a_n|<1$，这与 $|a_n|>1$ 矛盾，从而不合题意.

综上，只能有 $q=-1$. 此时方程①为 $\sin\frac{\pi x}{2}=-\frac{1}{4}x$，

记 $g(x)=\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{x}{4}, x\in\mathbf{R}$. 因为 $g(2)=\frac{1}{2}>0$，$g(3)=-\frac{1}{4}<0$

所以存在 $x_0\in(2,3)$，使 x_0 是方程①的解.

进而由函数 $y=g(x)$ 是奇函数，$-x_0$ 也是方程①的解. 因此只需取

$a_n=\begin{cases}x_0, & n=2k-1,\\ -x_0, & n=2k,\end{cases}$ 其中 k 是正整数即可.

综合上述，存在公比为负数的无穷等比数列 $\{a_n\}$，其公比只能是 -1.

13.（2023 上·上海松江·高三统考期末）为了鼓励居民节约用气，某市对燃气收费实行阶梯计价，普通居民燃气收费标准如下：

第一档：年用气量在 $0-310$（含）立方米，价格为 a 元/立方米；

第二档：年用气量在 $310-520$（含）立方米，价格为 b 元/立方米；

第三档：年用气量在 520 立方米以上，价格为 c 元/立方米.

(1)请写出普通居民的年度燃气费用（单位：元）关于年度的燃气用量（单位：立方米）的函数解析式（用含 a,b,c 的式子表示）；

(2)已知某户居民 2023 年部分月份用气量与缴费情况如下表，求 a,b,c 的值.

月份	1	2	3	4	5	9	10	12

当月燃气用量（立方米）	56	80	66	58	60	53	55	63
当月燃气费（元）	168	240	198	174	183	174.9	186	264.6

【答案】(1) $y=\begin{cases}ax,0<x\le 310\\310a+b(x-310),310<x\le 520\\310a+210b+c(x-520),x>520\end{cases}$

(2) $a=3$， $b=3.3$， $c=4.2$

【分析】（1）根据燃气收费标准求得解析式.

（2）根据表格提供数据以及函数解析式求得 a,b,c.

【详解】（1）依题意，函数解析式为：

$$y=\begin{cases}ax,0<x\le 310\\310a+b(x-310),310<x\le 520\\310a+210b+c(x-520),x>520\end{cases}$$

（2）解法一：

由一月份数据可得： $a=\dfrac{168}{56}=3$，

通过计算前 5 个月用量： $56+80+66+58+60=320$，

前 5 个月燃气总费用： $168+240+198+174+183=963$，

由（1）中函数解析式，计算可得： $963=310\times 3+b(320-310)$，

所以 $b=3.3$，

又 9 月份，10 月份，12 月份的燃气费均价分别为： $3.3,3.38,4.2$ 均不同，

所以 12 月份为第三档， $c=\dfrac{264.6}{63}=4.2$.

解法二：

1 月份，5 月份，9 月份，10 月份，12 月份的燃气费均价分别为： $3,3.05,3.3,3.38,4.2$ 均不同.

所以 1 月份为第一档，5 月份为第一档和第二档，10 月份与 12 月份不同，

则 12 月份为第三档，10 月份与 9 月份不同，10 月份为第二档与第三档，9 月份为第二档.

从而得到， $a=3,b=3.3,c=4.2$.

14．（2023·上海徐汇·统考一模）若函数 $y=f(x),x\in\mathbf{R}$ 的导函数 $y=f'(x),x\in\mathbf{R}$ 是以 $T(T\ne 0)$ 为周期的函数，则称函数 $y=f(x),x\in\mathbf{R}$ 具有“T 性质”.

(1)试判断函数 $y=x^2$ 和 $y=\sin x$ 是否具有“2π 性质”，并说明理由；

(2)已知函数 $y=h(x)$，其中 $h(x)=ax^2+bx+2\sin bx(0<b<3)$ 具有“π 性质”，求函数 $y=h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的极小值

点；

(3)若函数 $y=f(x),x\in\mathbf{R}$ 具有“T 性质”，且存在实数 $M>0$ 使得对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $|f(x)|<M$ 成立，求证：$y=f(x),x\in\mathbf{R}$ 为周期函数.

（可用结论：若函数 $y=f(x),x\in\mathbf{R}$ 的导函数满足 $f'(x)=0,x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)=C$（常数）.）

【答案】(1) $f(x)=x^2$ 不具有“2π 性质”，$g(x)=\sin x$ 具有“2π 性质”，理由见解析

(2) $\dfrac{2\pi}{3}$

(3)证明见解析

【分析】(1) 根据所给定义计算可得；

(2) 法一：依题意可得 $h'(x+\pi)=h'(x)$ 可得 $\cos bx-\cos b(x+\pi)=\dfrac{a\pi}{b}$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，再令 $x=0$、$x=\dfrac{\pi}{b}$ 求出 a、b 的值，再利用导数求出函数的极小值点；法二：依题意可得 $\sin(bx+\dfrac{b\pi}{2})\cdot\sin(\dfrac{b\pi}{2})=\dfrac{a\pi}{2b}$，所以 $\sin(\dfrac{b\pi}{2})=0$ 且 $\dfrac{a\pi}{2b}=0$，即可求出 a、b 的值，再利用导数求出函数的极小值点；

(3) 令 $h(x)=f(x+T)-f(x)$，则 $h'(x)=0$，从而得到 $h(x)=c$（c 为常数），法一：分 $c=0$、$c>0$、$c<0$ 三种情况讨论；法二：分 $c=0$ 和 $c\neq 0$ 两种情况讨论，当 $c\neq 0$ 时，不妨令 $c>0$，记 $n=\left[\dfrac{M}{c}\right]+1$，推出矛盾即可得解.

【详解】(1) $f(x)=x^2$ 不具有“2π 性质”．理由是：$f'(x)=2x$，$f'(2\pi)-f'(0)=4\pi\neq 0$，$\therefore f'(2\pi)\neq f'(0)$；

$g(x)=\sin x$ 具有“2π 性质”．理由是：$g'(x)=\cos x$，$g'(x+2\pi)=g'(x)$．

(2) 法一：$h(x)=ax^2+bx+2\sin bx(0<b<3)$，则 $h'(x)=2ax+b+2b\cos bx(0<b<3)$，

由 $h'(x+\pi)=h'(x)$ 可得 $\cos bx-\cos b(x+\pi)=\dfrac{a\pi}{b}$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

令 $x=0$，得 $1-\cos b\pi=\dfrac{a\pi}{b}$ ①；令 $x=\dfrac{\pi}{b}$，得 $-1+\cos b\pi=\dfrac{a\pi}{b}$ ②.

①+②得 $\dfrac{2a\pi}{b}=0$，因此 $a=0$，从而 $\cos bx=\cos(bx+b\pi)$ 恒成立，

$\therefore b\pi=2k\pi$ 即有 $b=2k,k\in\mathbf{Z}$ 且 $b\neq 0$．

由 $0<b<3$ 得 $b=2$，所以 $h'(x)=2+4\cos 2x$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，令 $h'(x)=0$ 可得 $x=\dfrac{\pi}{3},x=\dfrac{2\pi}{3}$，列表如下：

x	$[0,\frac{\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$	$\frac{2\pi}{3}$	$(\frac{2\pi}{3},\pi]$
$h'(x)$	+	0	−	0	+

$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

函数 $h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 的极小值点为 $\frac{2\pi}{3}$.

法二：$h'(x)=2ax+b+2b\cos bx(0<b<3)$，

由 $h'(x+\pi)=h'(x)$，可得 $\cos bx-\cos b(x+\pi)=\frac{a\pi}{b}$，

所以 $\cos\left[\left(bx+\frac{b\pi}{2}\right)-\frac{b\pi}{2}\right]-\cos\left[\left(bx+\frac{b\pi}{2}\right)+\frac{b\pi}{2}\right]=\frac{a\pi}{b}$，

即 $\cos\left(bx+\frac{b\pi}{2}\right)\cos\frac{b\pi}{2}+\sin\left(bx+\frac{b\pi}{2}\right)\sin\frac{b\pi}{2}-\cos\left(bx+\frac{b\pi}{2}\right)\cos\frac{b\pi}{2}+\sin\left(bx+\frac{b\pi}{2}\right)\sin\frac{b\pi}{2}=\frac{a\pi}{b}$，

所以 $\sin(bx+\frac{b\pi}{2})\cdot\sin(\frac{b\pi}{2})=\frac{a\pi}{2b}$，所以 $\sin(\frac{b\pi}{2})=0$ 且 $\frac{a\pi}{2b}=0$，所以 $a=0$ 且 $b=2k(k\in Z)$ 且 $b\neq 0$.

由 $0<b<3$ 得 $b=2$，所以 $h'(x)=2+4\cos 2x$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，令 $h'(x)=0$ 可得 $x=\frac{\pi}{3},x=\frac{2\pi}{3}$，列表如下：

x	$[0,\frac{\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$	$\frac{2\pi}{3}$	$(\frac{2\pi}{3},\pi]$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

函数 $h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 的极小值点为 $\frac{2\pi}{3}$.

（3）令 $h(x)=f(x+T)-f(x)$，因为 $y=f(x),x\in R$ 具有“T”性质

$\therefore f'(x+T)=f'(x)$，

$\therefore h'(x)=f'(x+T)-f'(x)=0$，

$\therefore h(x)=c=f(x+T)-f(x)$（$c$ 为常数），

法一：

① 若 $c=0$，$f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数；

②若 $c>0$，由 $f(nT)=f(0)+nc$，

当 $n\geq\frac{M-f(0)}{c}$ 时，$f(nT)=f(0)+nc\geq f(0)+M-f(0)=M$，这与 $|f(x)|<M$ 矛盾，舍去；

③若 $c<0$，由 $f(nT)=f(0)+nc$，

当 $n\leq\frac{-M-f(0)}{c}$ 时，$f(nT)=f(0)+nc\leq f(0)-M-f(0)=-M$，这与 $|f(x)|<M$ 矛盾，舍去.

综上，$c=0$．$f(x+T)-f(x)=0$，所以 $f(x)$ 是周期函数.

法二：

当 $c=0$ 时，$f(x+T)-f(x)=0$，所以 $f(x)$ 是周期函数.

当 $c\neq 0$ 时，不妨令 $c>0$，记 $n=\left[\frac{M}{c}\right]+1$，其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.（$c<0$ 同理可证），

若存在 $f(x_0)>0$，这 $|f(x_0+nT)|=f(x_0)+nc>nc=\left(\left[\frac{M}{c}\right]+1\right)c>M$.

这与 $|f(x)|<M$ 矛盾.

若存在 $f(x_0)<0$，这 $|f(x_0-nT)|=|f(x_0)-nc|>nc=\left(\left[\frac{M}{c}\right]+1\right)c>M$.

这与 $|f(x)|<M$ 矛盾.

若不存在 $x_0\in\mathrm{R}$，使得 $f(x_0)>0$ 或 $f(x_0)<0$，则 $f(x)=0,x\in\mathrm{R}$，此时 $c=0$，与 $c\neq 0$ 矛盾，故舍去.

综上，$c=0$. $f(x+T)-f(x)=0$，所以 $f(x)$ 是周期函数.

【点睛】方法点睛：函数新定义问题的方法和技巧：

（1）可通过举例子的方式，将抽象的定义转化为具体的简单的应用，从而加深对信息的理解；

（2）可用自己的语言转述新信息所表达的内容，如果能清晰描述，那么说明对此信息理解的较为透彻；

（3）发现新信息与所学知识的联系，并从描述中体会信息的本质特征与规律；

（4）如果新信息是课本知识的推广，则要关注此信息与课本中概念的不同之处，以及什么情况下可以使用书上的概念.

15.（2023 上·上海虹口·高三统考期末）已知 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 都是定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数，若对任意 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $g(x_1)\le\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\le g(x_2)$，则称 $y=g(x)$ 是 $y=f(x)$ 的一个“控制函数”.

(1)判断 $y=2x$ 是否为函数 $y=x^2(x>0)$ 的一个控制函数，并说明理由；

(2)设 $f(x)=\ln x$ 的导数为 $f'(x)$，$0<a<b$，求证：关于 x 的方程 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x)$ 在区间 (a,b) 上有实数解；

(3)设 $f(x)=x\ln x$，函数 $y=f(x)$ 是否存在控制函数？若存在，请求出 $y=f(x)$ 的控制函数；若不存在，请说明理由.

【答案】(1)是，理由见解析

(2)证明见解析

(3)存在，$y=\ln x$

【分析】(1) 根据已知控制函数的定义，即可得出结论；

(2) 设 $y=\ln x-x+1$，$x>0$，由其导数得出其在 $x>0$ 上的最大值为 0，则 $\ln\frac{b}{a}-\frac{b}{a}+1<0$，$\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{b}+1<0$，变形化简得出 $\frac{1}{b}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{1}{a}$，而 $f'(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 (a,b) 上的值域为 $\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right)$，即可证明；

(3) 由上面两问可看出控制函数可能是原函数的导数，证明 $\ln x_1<\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\ln x_2$，根据不等式的运算可以证明，发现控制函数可能是原函数的导数去掉常数项.

【详解】(1) 对任意 $0<x_1<x_2$，则 $\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2}=x_1+x_2$，且 $2x_1\le x_1+x_2\le 2x_2$，

故 $y=2x$ 是函数 $y=x^2(x>0)$ 的一个控制函数；

(2) 因为 $0<a<b$，则 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}$，

则 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{1}{a}=\frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}-\frac{1}{a}$，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{1}{b}=\frac{\ln\frac{a}{b}}{a-b}-\frac{1}{b}$

$\because 0<a<b$，$\therefore \frac{b}{a}>1$，$0<\frac{b}{a}<1$

设 $y=\ln x-x+1$，$x>0$

在 $x>1$ 上 $y'=\frac{1}{x}-1<0$，在 $0<x<1$ 上 $y'=\frac{1}{x}-1>0$，

则 $y=\ln x-x+1$ 在 $x>1$ 单调递减，在 $0<x<1$ 上单调递增，

最大值 $y_{\max}=\ln 1-1+1=0$，

$\because 0<a<b$，$\therefore \frac{b}{a}>1$，$0<\frac{b}{a}<1$，$b-a>0$，$a-b<0$，

$\therefore \ln\frac{b}{a}-\frac{b}{a}+1<0$，$\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{b}+1<0$，

则 $\ln\frac{b}{a}-\frac{b-a}{a}<0$，

$\because b-a>0$

$\therefore \frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}-\frac{1}{a}<0$，即 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{1}{a}$，

同理，$\ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{b}<0$，

Q $a-b<0$

$\therefore \ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{b}>0$，即 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{1}{b}$

综上：$\frac{1}{b}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{1}{a}$，

$f'(x)=\frac{1}{x}$，在区间(a,b)上的值域为$\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right)$，

则$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x)$在区间$(a,b)$上有实数解.

（3）$f(x)=x\ln x$，则$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}$，其中$0<x_1<x_2$

$\frac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}-\ln x_1$，

$=\frac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}-\frac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_1}{x_1-x_2}$，

$=\frac{-x_2\ln x_2+x_2\ln x_1}{x_1-x_2}=\frac{x_2\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，

$\because 0<x_1<x_2$，$\therefore 0<\frac{x_1}{x_2}<1, x_1-x_2<0$，

$\therefore \ln\frac{x_1}{x_2}<0$，则$\frac{x_2\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}>0$，即$\frac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}>\ln x_1$，

同理$\frac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}<\ln x_2$，

即$\ln x_1<\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\ln x_2$，

则$y=\ln x$是$y=f(x)$的一个控制函数.

【点睛】关键点睛：对于函数的新定义题要理解好定义的内容，不等式运算时注意不等式的要求，变号时要多注意，一般的大题在前面的问题和后面的问题有联系，后面的问题没有思路时看看前面的问题，

16.（2023·上海长宁·统考一模）若函数$y=f(x)$与$y=g(x)$满足：对任意$x_1,x_2\in\mathbf{R}$，都有$|f(x_1)-f(x_2)|\geq|g(x_1)-g(x_2)|$，则称函数$y=f(x)$是函数$y=g(x)$的“约束函数”.已知函数$y=f(x)$是函数$y=g(x)$的“约束函数”.

(1)若$f(x)=x^2$，判断函数$y=g(x)$的奇偶性，并说明理由；

(2)若$f(x)=ax+x^3(a>0), g(x)=\sin x$，求实数$a$的取值范围；

(3)若$y=g(x)$为严格减函数，$f(0)<f(1)$，且函数$y=f(x)$的图像是连续曲线，求证：$y=f(x)$是$(0,1)$上的严格增函数.

【答案】(1) $y=g(x)$是偶函数；理由见解析

(2) $a \geq 1$

(3)证明见解析

【分析】（1）根据题意结合偶函数的定义分析证明；

（2）根据题意结合 $y=f(x)$ 的单调性分析可得 $f(x_1)+g(x_1)\leq f(x_2)+g(x_2)$，$f(x_1)-g(x_1)\leq f(x_2)-g(x_2)$，设 $u(x)=f(x)+g(x)$，$v(x)=f(x)-g(x)$，可知 $y=u(x)$ 与 $y=v(x)$ 均为R 上的严格增函数，利用导数分析求解；

（3）根据题意分析可得任意 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，利用反证法先证当 $0<x<1$ 时，$f(0)<f(x)<f(1)$，再明当 $0<x_1<x_2<1$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$，即可得结果.

【详解】（1）因为 $f(x)=x^2$，故对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)-f(-x)=0$.

又因为函数 $y=f(x)$ 是函数 $y=g(x)$ 的“约束函数”，

则对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\geq|g(x_1)-g(x_2)|$，

取 $x_1=x\in\mathbf{R}, x_2=-x$，可得 $0=|f(x)-f(-x)|\geq|g(x)-g(-x)|$ 恒成立，

即 $g(x)=g(-x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 成立，故 $y=g(x)$ 是偶函数；

（2）因为 $y=ax(a>0), y=x^3$ 是R 上的严格增函数，则 $y=f(x)$ 是R 上的严格增函数，

设 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)<f(x_2)$，

进而 $|g(x_1)-g(x_2)|\leq f(x_2)-f(x_1)$，

可得 $g(x_1)-g(x_2)\leq f(x_2)-f(x_1)$，$g(x_2)-g(x_1)\leq f(x_2)-f(x_1)$，

所以 $f(x_1)+g(x_1)\leq f(x_2)+g(x_2)$，$f(x_1)-g(x_1)\leq f(x_2)-g(x_2)$，

设 $u(x)=f(x)+g(x)$，$v(x)=f(x)-g(x)$，

则 $y=u(x)$ 与 $y=v(x)$ 均为R 上的严格增函数，

因为 $u'(x)=a+3x^2+\cos x\geq 0$，$v'(x)=a+3x^2-\cos x\geq 0$ 恒成立，

对于 $v'(x)=a+3x^2-\cos x\geq 0$ 恒成立，

因为 $3x^2\geq 0$，$-\cos x\geq -1$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

所以 $a+3x^2-\cos x\geq a-1\geq 0$，解得得 $a\geq 1$，

当 $a\ge 1$ 时，$u'(x)=a+3x^2+\cos x\ge a+\cos x\ge 0$ 恒成立，

所以实数 a 的取值范围为 $a\ge 1$.

（3）设 $x_1<x_2$，因为 $y=g(x)$ 是严格减函数，所以 $g(x_1)>g(x_2)$，即 $g(x_1)-g(x_2)>0$，

而 $|f(x_2)-f(x_1)|\ge|g(x_1)-g(x_2)|$，所以 $|f(x_1)-f(x_2)|>0$，

所以对任意 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\ne f(x_2)$，

①首先证明：当 $0<x<1$ 时，$f(0)<f(x)<f(1)$，

假设存在 $0<x_0<1$，且 $f(1)<f(x_0)$，

设 $h(x)=f(x)-f(1)$，则 $h(0)<0$，$h(x_0)>0$，

所以存在 $x_3\in(0,x_0)$，使得 $h(x_3)=0$，

得 $f(x_3)=f(1)$，与结论对任意 $x_1<x_2$，$f(x_1)\ne f(x_2)$ 矛盾，

所以不存在 $0<x_0<1$，使得 $f(1)<f(x_0)$，

同理可得：也不存在 $0<x_0<1$，使得 $f(x_0)<f(0)$，

所以当 $0<x<1$ 时，$f(0)<f(x)<f(1)$.

②再证明：当 $0<x_1<x_2<1$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$，

假设存在 $0<x_1<x_2<1$，使得 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(0)<f(x_2)<f(x_1)<f(1)$，

设 $h(x)=f(x)-f(x_2)$，则 $h(0)<0$，$h(x_1)>0$，

所以存在 $x_3\in(0,x_1)$，使得 $h(x_3)=0$，

得 $f(x_3)=f(x_2)$，与结论对任意 $x_1<x_2$，$f(x_1)\ne f(x_2)$ 矛盾，

所以假设不成立，即对任意 $x_1,x_2\in(0,1)$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$

所以 $y=f(x)$ 是 $(0,1)$ 上的严格增函数.

【点睛】关键点睛："新定义"题型的关键是根据新定义的概念、新公式、新定理、新法则、新运算五种，然后根据此新定义去解决问题，有时还需要用类比的方法去理解新的定义，这样有助于对新定义的透彻理解，（3）中也结合反证法分析求解.

17．（2023·上海金山·统考一模）设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，给定区间 $[a,b]\subseteq D$，若存在 $x_0\in(a,b)$，

使得 $f(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则称函数 $y=f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的"均值函数"，x_0 为函数 $y=f(x)$ 的"均值点"．

(1)试判断函数 $y=x^2$ 是否为区间 $[1,2]$ 上的"均值函数"，如果是，请求出其"均值点"；如果不是，请说明理由；

(2)已知函数 $y=-2^{2x-1}+m\cdot 2^{x-1}-12$ 是区间 $[1,3]$ 上的"均值函数"，求实数 m 的取值范围；

(3)若函数 $y=\dfrac{x^2+a}{2(x^2-2x+2)}$（常数 $a\in\mathbf{R}$）是区间 $[-2,2]$ 上的"均值函数"，且 $\dfrac{2}{3}$ 为其"均值点"．将区间 $[-2,0]$ 任意划分成 $m+1$（$m\in\mathrm{N}$）份，设分点的横坐标从小到大依次为 $t_1,t_2,\cdots,t_m$，记 $t_0=-2$，$t_{m+1}=0$，$G=\sum_{i=0}^{m}|f(t_{i+1})-f(t_i)|$．再将区间 $[0,2]$ 等分成 2^n+1（$n\in\mathbf{N}$）份，设等分点的横坐标从小到大依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_{2^n}$，记 $H=\sum_{i=1}^{2^n}f(x_i)$．求使得 $H\cdot G>2023$ 的最小整数 n 的值．

【答案】(1) $y=x^2$ 为区间 $[1,2]$ 上的"均值函数"，且 $\sqrt{3}$ 为其"均值点"

(2) $(-\infty,2)\cup[2\sqrt{3}+6,+\infty)$

(3) 15

【分析】（1）根据题意，得到方程 $x_0^2=\dfrac{2^2-1^2}{2-1}$，求得 $x_0=\sqrt{3}$，即可得到答案；

（2）设 x_0 为该函数的"均值点"，则 $x_0\in(1,3)$，根据题意转化为 $(2^{x_0}-3)m=2^{2x_0}-6$ 在 $(1,3)$ 上有解，分类讨论，结合对勾函数性质，即可求解；

（3）根据题意，得到方程 $f(\frac{2}{3})=\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$，求得 $a=0$，得出 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x^2-2x+2)}$，利用导数求得函数的单调性，得到 $f(t_i)\ge f(t_{i+1})$，求得 $G=\dfrac{1}{5}$，结合 $f(x)+f(2-x)=1$，进而求得 $H=2^{n-1}$，利用指数幂的运算性质，即可求解.

【详解】（1）解：设函数 $y=x^2$ 是区间 $[1,2]$ 上的"均值函数"，且均值点为 $x_0\in[1,2]$，

可得 $x_0^2=\dfrac{2^2-1^2}{2-1}$，解得 $x_0=\sqrt{3}$ 或 $x_0=-\sqrt{3}$（舍）.

故 $y=x^2$ 为区间 $[1,2]$ 上的"均值函数"，且 $\sqrt{3}$ 为其"均值点".

（2）解：设 x_0 为该函数的"均值点"，则 $x_0\in(1,3)$，

且 $-2^{2x_0-1}+m\cdot 2^{x_0-1}-12=\dfrac{(-2^5+m\cdot 2^2-12)-(-2+m\cdot 2^0-12)}{3-1}$，

即关于 x_0 的方程 $2^{2x_0}-m\cdot 2^{x_0}+3m-6=0$ 在区间 $(1,3)$ 上有解，

整理得 $(2^{x_0}-3)m=2^{2x_0}-6$，

①当 $2^{x_0}=3$ 时，$0\cdot m=3$，方程无解.

②当 $2^{x_0}\neq 3$ 时，可得 $m=\dfrac{2^{2x_0}-6}{2^{x_0}-3}$.

令 $t=2^{x_0}-3$，则 $t\in(-1,0)\cup(0,5)$，且 $2^{x_0}=t+3$，

可得 $m=\dfrac{(t+3)^2-6}{t}=t+\dfrac{3}{t}+6$，

又由对勾函数性质，可得函数 $y=t+\dfrac{3}{t}+6$ 在 $t\in(-1,0)$ 上是严格减函数，

在 $t\in(0,\sqrt{3}]$ 上是严格减函数，在 $t\in[\sqrt{3},5)$ 上严格增函数，

所以当 $t\in(-1,0)$ 时，可得 $y<2$，当 $t\in(0,5)$，可得 $y\geq 2\sqrt{3}+6$，

所以 $m\in(-\infty,2)\cup[2\sqrt{3}+6,+\infty)$.

即实数 m 的取值范围是 $(-\infty,2)\cup[2\sqrt{3}+6,+\infty)$.

（3）解：由函数 $y=\dfrac{x^2+a}{2(x^2-2x+2)}$ 是区间 $[-2,2]$ 上的“均值函数”，且 $\dfrac{2}{3}$ 为其“均值点”，

可得 $f(\dfrac{2}{3})=\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$，即 $\dfrac{(\frac{2}{3})^2+a}{2[(\frac{2}{3})^2-2\times\frac{2}{3}+2]}=\dfrac{\frac{4+a}{2(4-4+2)}-\frac{4+a}{2(4+4+2)}}{2-(-2)}$，

解得 $a=0$，所以 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x^2-2x+2)}$，

则 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x\cdot(x^2-2x+2)-x^2\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=\dfrac{x(2-x)}{(x^2-2x+2)^2}$，

当 $x\in[-2,0]$ 时，$f'(x)\leq 0$，即 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x^2-2x+2)}$ 在 $[-2,0]$ 上单调递减，

所以 $f(t_i)\geq f(t_{i+1})$（$i=0,1,2,\cdots,m$），

则 $G=\sum\limits_{i=0}^{m}|f(t_{i+1})-f(t_i)|=\sum\limits_{i=0}^{m}[f(t_i)-f(t_{i+1})]=f(t_0)-f(t_{m+1})=f(-2)-f(0)=\dfrac{1}{5}$，

又因为 $f(x)+f(2-x)=\dfrac{x^2}{2(x-1)^2+2}+\dfrac{(2-x)^2}{2(1-x)^2+2}=1$，

从而 $H=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2^n})$，$H=f(x_{2^n})+f(x_{2^n-1})+\cdots+f(x_1)$，

所以 $2H=2^{n}$，可得 $H=2^{n-1}$.，

由 $\frac{1}{5}\cdot 2^{n-1}>2023$，即 $2^{n}>20230$，可得 $n>\log_{2}20230\approx 14.3$，

故使得 $H\cdot G>2023$ 的最小整数 n 的值为 15.

【点睛】方法指数总结：对于函数的新定义题型的求解策略：

（1）关于函数的新定义问题，关键是理解函数新定义的概念，根据函数的新定义的概念，挖掘其隐含条件，把新定义问题转化为函数关系或不等关系式等是解答的关键；

（2）关于函数的新定义问题，通常关联着函数的基本性质的综合应用，解答中要熟练掌握和应用函数的有关性质和一些重用的结论，同时注意合理应用数形结合、导数、均值不等式等知识点的应用，以及它们之间的逻辑关系，提升逻辑推理能力.

二、指对数函数，8 题

18．（2023·上海杨浦·统考一模）等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\frac{1}{64}$，公比为 q，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\log_{0.5}a_n$（n 是正整数），若当且仅当 $n=4$ 时，$\{b_n\}$ 的前 n 项和 B_n 取得最大值，则 q 取值范围是（　　）

A．$\left(3,2\sqrt{3}\right)$　　B．$\left(3,4\right)$　　C．$\left(2\sqrt{2},4\right)$　　D．$\left(2\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)$

【答案】C

【分析】求出 $\{b_n\}$ 的通项公式，分析出其为等差数列，然后由条件得出 $\begin{cases}b_4>0\\ b_5<0\end{cases}$，代入通项公式即可求解.

【详解】$b_n=\log_{0.5}a_n=\log_{0.5}\left(a_1\cdot q^{n-1}\right)=\log_{0.5}\frac{1}{64}+\log_{0.5}q^{n-1}=6+(n-1)\log_{0.5}q=n\log_{0.5}q+6-\log_{0.5}q$

所以 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=6$ 为首项，$d=\log_{0.5}q$ 为公差的等差数列，

若当且仅当 $n=4$ 时，$\{b_n\}$ 的前 n 项和 B_n 取得最大值，

所以 $\begin{cases}b_4>0\\ b_5<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6+3\log_{0.5}q>0\\ 6+4\log_{0.5}q<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_{0.5}q>-2\\ \log_{0.5}q<-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_{0.5}q>\log_{0.5}0.5^{-2}\\ \log_{0.5}q<\log_{0.5}0.5^{-\frac{3}{2}}\end{cases}$

$\Rightarrow 0.5^{-\frac{3}{2}}<q<0.5^{-2}$ 即，$2\sqrt{2}<q<4$，

故选：C.

19．（2023·上海崇明·统考一模）若 $x>y>0$，则下列不等式正确的是（　　）

A．$|x|<|y|$　　B．$x^2<y^2$　　C．$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$　　D．$\frac{x+y}{2}\leqslant\sqrt{xy}$

【答案】C

【分析】ABD 举反例即可判断，C 结合反比例函数即可判断.

【详解】对 A，若 $x=2,y=1$，则 $x>y>0$，但 $|x|>|y|$，A 错误；

对 B，若 $x=2,y=1$，则 $x>y>0$，但 $x^2>y^2$，B 错误

对 D，若 $x=2,y=1$，则 $x>y>0$，$\frac{3}{2}=\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy}=\sqrt{2}$，D 错误；

对 C，结合反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 知其在 $(0,+\infty)$ 单调递减，则 $x>y>0$，有 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$，C 正确.

故选：C

20.（2023·上海青浦·统考一模）已知 a，$b\in\mathrm{R}$，则“$a>b$”是“$a^3>b^3$”的（　）.

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分也非必要条件

【答案】C

【分析】直接根据充分性和必要性的定义判断即可.

【详解】因为函数 $y=x^3$ 在 R 上单调递增，

所以 $a>b\Leftrightarrow a^3>b^3$，

即“$a>b$”是“$a^3>b^3$”的充要条件.

故选：C.

21.（2023·上海闵行·统考一模）已知 a，$b\in\mathrm{R}$，$a>b$，则下列不等式中不一定成立的是（　）

A．$a+2>b+2$　　B．$2a>2b$　　C．$a^2>b^2$　　D．$2^a>2^b$

【答案】C

【分析】根据不等式性质可判断 A，B；举反例可判断 C；根据指数函数的单调性判断 D.

【详解】对于 A，B，a，$b\in\mathrm{R}$，$a>b$，则 $a+2>b+2,2a>2b$ 一定成立；

对于 C，取 $a=-1,b=-2$，满足 $a>b$，则 $a^2<b^2$，

当 $a>b>0$ 时，$a^2>b^2$，故 C 中不等式不一定成立；

对于 D，由 $a>b$，由于 $y=2^x$ 在 R 上单调递增，则 $2^a>2^b$ 成立，

故选：C

22.（2023 上·上海松江·高三统考期末）已知 $\lg a+\lg b=1$，则 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 的最小值为________

【答案】$4\sqrt{5}$

【分析】根据对数运算求得 a,b 的关系，利用基本不等式求得正确答案.

【详解】依题意，$\lg a+\lg b=\lg ab=1$，

所以 $ab=10$ 且 $a>0,b>0$，

所以 $a+2b\geq 2\sqrt{a\cdot 2b}=4\sqrt{5}$，

当$a=2b=2\sqrt{5}$时等号成立.

故答案为：$4\sqrt{5}$

23.（2023上·上海虹口·高三统考期末）函数$y=\lg(x-2)+\dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$的定义域为________.

【答案】$(2,5)$

【分析】根据对数的真数大于0和根号下大于等于0以及分母不等于0得到不等式组，解出即可.

【详解】由题意得$\begin{cases}x-2>0\\5-x>0\end{cases}$，解得$2<x<5$，所以定义域为$(2,5)$，

故答案为：$(2,5)$.

24.（2023·上海宝山·统考一模）已知函数$f(x)=(x+1)^3+1$，正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_{1012}=\dfrac{1}{10}$，则$\sum\limits_{k=1}^{2023}f(\lg a_k)$

【答案】2023

【分析】利用倒序相加法，结合函数的对称性以及等比数列的性质即可求得正确答案.

【详解】函数$f(x)=(x+1)^3+1$，可看成$y=x^3$向左平移1个单位，向上平移1个单位得到,

因为$y=x^3$的对称中心为$(0,0)$，所以$f(x)=(x+1)^3+1$的对称中心为$(-1,1)$，

所以$f(x)+f(-2-x)=2$，

因为正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_{1012}=\dfrac{1}{10}$，所以$a_1\cdot a_{2023}=a_2\cdot a_{2022}=\cdots=a_{1012}^2=\dfrac{1}{100}$，

所以$\lg a_1+\lg a_{2023}=\lg a_2+\lg a_{2022}=\cdots=2\lg a_{1012}=-2$，

所以$f(\lg a_1)+f(\lg a_{2023})=f(\lg a_2)+f(\lg a_{2022})=\cdots=2$，

$\sum\limits_{k=1}^{2023}f(\lg a_k)=f(\lg a_1)+f(\lg a_2)+f(\lg a_3)+\cdots+f(\lg a_{2023})$ ①，

$\sum\limits_{k=1}^{2023}f(\lg a_k)=f(\lg a_{2023})+f(\lg a_{2022})+f(\lg a_{2021})+\cdots+f(\lg a_1)$ ②，

则①②相加得：

$2\sum\limits_{k=1}^{2023}f(\lg a_k)=[f(\lg a_1)+f(\lg a_{2023})]+[f(\lg a_2)+f(\lg a_{2022})]+\cdots+[f(\lg a_{2023})+f(\lg a_1)]$，即

$2\sum\limits_{k=1}^{2023}f(\lg a_k)=2023\times2$，

所以$\sum\limits_{k=1}^{2023}f(\lg a_k)=2023$.

故答案为：2023.

25.（2023·上海杨浦·统考一模）设函数$f(x)=e^x$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)求方程$\left(f\left(x\right)\right)^{2}=f\left(x\right)+2$的实数解；

(2)若不等式$x+b\leq f\left(x\right)$对于一切$x\in\mathbf{R}$都成立，求实数b的取值范围.

【答案】(1)$\ln 2$

(2)$b\leq 1$

【分析】（1）转化为关于e^{x}的一元二次方程求解即可；

（2）分离参数后，构造函数，利用导数求函数的最小值即可得解.

【详解】（1）由$f\left(x\right)=e^{x}$知，方程$\left(f\left(x\right)\right)^{2}=f\left(x\right)+2$为$\left(e^{x}\right)^{2}=e^{x}+2$，

即$\left(e^{x}-2\right)\left(e^{x}+1\right)=0$，

解得$e^{x}=2$，即$x=\ln 2$.

（2）不等式$x+b\leq f\left(x\right)$即$x+b\leq e^{x}$，

原不等式可化为$b\leq e^{x}-x$对于一切$x\in\mathbf{R}$都成立，

令$g(x)=e^{x}-x$，则$g'(x)=e^{x}-1$，

当$x>0$时，$g'(x)>0$，当$x<0$时，$g'(x)<0$，

所以函数$g(x)$在$(-\infty,0)$上递减，在$(0,+\infty)$上递增，

故当$x=0$时，$(x)_{\min}=g(0)=1$，

所以$b\leq 1$.

三、函数的应用，6 题

26.（2023·上海青浦·统考一模）若函数$y=\cos(x+\phi)$是奇函数，则该函数的所有零点是________.

【答案】$x=k\pi,k\in Z$；

【分析】根据函数为奇函数进行求解即可.

【详解】因为函数$y=\cos(x+\phi)$是奇函数，

所以$0+\phi=\frac{\pi}{2}+k_1\pi,k_1\in Z$，即$\phi=\frac{\pi}{2}+k_1\pi,k_1\in Z$，

则$y=\cos(x+\phi)=0$，

得$x+\phi=\frac{\pi}{2}+k_2\pi,k_2\in Z\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k_2\pi-\phi=\left(k_2-k_1\right)\pi$，

则$x=\left(k_2-k_1\right)\pi=k\pi$，其中$k=k_2-k_1\in Z$，

所以该函数的所有零点是$x=k\pi,k\in Z$.

故答案为：$x=k\pi,k\in Z$

27.（2023上·上海虹口·高三统考期末）设$a\in\mathbf{R}$，若关于x的方程$2x|x|-(a-2)x+|x|-a+1=0$有3个不同的实数解，则实数a的取值范围为________.

【答案】$(9,+\infty)$

【分析】根据题意分类讨论，转化为二次函数问题直接求解即可.

【详解】当$x\geq 0$时，方程可化为$2x^2-(a-3)x-a+1=0$，即$(2x-a+1)(x+1)=0$，

则$x=\dfrac{a-1}{2}$或$x=-1$（舍）；

当$x<0$时，方程可化为$-2x^2+(1-a)x-a+1=0$；

要使原方程有三个根，则$x\geq 0$时有一根，$x<0$时有两根，

则$\dfrac{a-1}{2}\geq 0$且$\begin{cases}\Delta=(1-a)^2+8(1-a)>0\\ \dfrac{1-a}{2}<0\\ \dfrac{a-1}{2}>0\end{cases}$，解得$a\geq 1$且$a>9$，

所以实数a的取值范围为$(9,+\infty)$

【点睛】方法点睛：已知函数有零点(方程有根)求参数值(取值范围)常用的方法：

（1）直接法：直接求解方程得到方程的根，再通过解不等式确定参数范围；

（2）分离参数法：先将参数分离，转化成求函数的值域问题加以解决；

（3）数形结合法：先对解析式变形，进而构造两个函数，然后在同一平面直角坐标系中画出函数的图象，利用数形结合的方法求解

28.（2023·上海长宁·统考一模）在有声世界，声强级是表示声强度相对大小的指标.其值y（单位：dB）定义为$y=10\lg\dfrac{I}{I_0}$.其中I为声场中某点的声强度，其单位为$\mathrm{W/m^2}$，$I_0=10^{-12}\mathrm{W/m^2}$为基准值.若$I=10\mathrm{W/m^2}$，则其相应的声强级为__________dB.

【答案】130

【分析】将题中数据直接代入公式，结合对数运算求解.

【详解】因为$I=10\mathrm{W/m^2}$，$I_0=10^{-12}\mathrm{W/m^2}$，

所以其相应的声强级为$y=10\lg\dfrac{10}{10^{-12}}=10\lg 10^{13}=130$ dB.

故答案为：130.

29.（2023·上海徐汇·统考一模）函数$y=\lg(2x+1)+\lg x$的零点是______________.

【答案】$\frac{1}{2}$/0.5

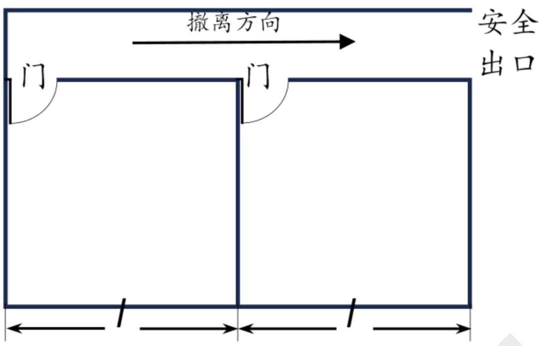
【分析】利用对数运算及零点含义可得答案.

【详解】由题意可得函数的定义域为$\left(0,+\infty\right)$.

$y=\lg(2x+1)+\lg x=\lg(2x^2+x)$，令$y=0$可得$2x^2+x=1$，解得$x=\frac{1}{2}$或$x=-1$（舍），

故答案为：$\frac{1}{2}$.

30.（2023·上海青浦·统考一模）上海各中学都定期进行紧急疏散演习：当警报响起，建筑物内师生马上有组织、尽快地疏散撤离．对于一个特定的建筑物，管理人员关心房间内所有人疏散完毕（房间最后一个人到达安全出口处）所用时间．数学建模小组准备对某教学楼第一层楼两间相同的教室展开研究．为此，他们提出如下模型假设：



1.疏散时所有人员有秩序地撤离建筑物；

2.所有人员排成单列行进撤离；

3.队列中人员的间隔是均匀的；

4.队列匀速地撤离建筑物．

(1)上述模型假设是否合理，请任选两个模型假设说明理由；

(2)如图，设第一间教室（图中右）的人数为n_1+1，第二间教室（图中左）的人数为n_2+1，每间教室的长度为l，其中n_1，n_2都是正整数，$l>0$，忽略教室门的宽度及忽略教室内人群到教室门口的时间．请再引入适当的变量，建立两个教室内的人员完全撤离所用时间的数学模型．

【答案】(1)答案见解析

(2)答案见解析

【分析】（1）根据各假设的目的分别判断；

（2）设队列人与人之间的距离为$d\left(d>0\right)$，队列行进的速度为$v\left(v>0\right)$，分两种情况讨论，情况一：当第

二间教室的第一个人到达第一间教室门口的时候，第一间教室已经撤空，$t=\frac{2l+n_2d}{v}$；情况二：当第二间教室的第一个人到达第一间教室门口的时候，第一间教室还没有撤空，$t=\frac{l+n_1d+n_2d+d}{v}$，可得分段函数模型.

【详解】(1) 四个模型假设都合理．理由如下（供参考）：

假设 1 是为了保证撤离人员的安全，基本符合实际情况；

假设 2 是为了方便模型的建立，与假设 1 相呼应；

假设 3 是为了方便建立模型，属于模型简化的处理方法；

假设 4 是为了方便建立模型，属于模型简化的处理方法.

(2) 设队列人与人之间的距离为 $d\left(d>0\right)$，队列行进的速度为 $v\left(v>0\right)$，

先考虑第一间教室人员的疏散，该教室最后一个人达到出口即为疏散完毕，所用时间 $t_1=\frac{l+n_1d}{v}$；第二间教室最后一个人达到出口所用时间为 $t_2=\frac{2l+n_2d}{v}$.

在所有人员排成单列行进撤离的假设下，建立模型（供参考）

情况一：

当第二间教室的第一个人到达第一间教室门口的时候，第一间教室已经撤空（即第一间教室的最后一个人不影响第二间教室人员的撤离），这种情形出现的条件是 $\frac{n_1d+d}{v}\le\frac{l}{v}$，这时两个教室内的人员完全撤离所用时间为 $t=\frac{2l+n_2d}{v}$；

情况二：

当第二间教室的第一个人到达第一间教室门口的时候，第一间教室还没有撤空，此时需要等第一间教室撤空后第二间教室的队伍再继续行进，这种情形出现的条件是 $\frac{n_1d+d}{v}>\frac{l}{v}$，这时两个教室内的人员完全撤离所用时间为 $t=\frac{l+n_1d+n_2d+d}{v}$，

$$t=\begin{cases}\frac{2l+n_2d}{v},\left(n_1d+d\le l\right)\\ \frac{l+n_1d+n_2d+d}{v},\left(n_1d+d>l\right)\end{cases}.$$

31．(2023·上海宝山·统考一模) 已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-x$，$g\left(x\right)=\mathrm{e}^{-x}+x$，其中 e 为自然对数的底数.

(1)求函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

(2)设函数 $F\left(x\right)=af\left(x\right)-g\left(x\right)$，

①若 $a=\mathrm{e}$，求函数 $y=F\left(x\right)$ 的单调区间，并写出函数 $y=F\left(x\right)-m$ 有三个零点时实数 m 的取值范围；

②当 $0<a<1$ 时，x_1、x_2 分别为函数 $y=F(x)$ 的极大值点和极小值点，且不等式 $F(x_1)+tF(x_2)>0$ 对任意 $a\in(0,1)$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

【答案】(1) $y=(\mathrm{e}-1)x$；

(2)①单调区间见解析，$(\mathrm{e}-1,2)$，②$(-\infty,-1]$.

【分析】（1）求出函数 $f(x)$ 的导数，利用导数的几何意义求出切线方程即得.

（2）①把 $a=\mathrm{e}$ 代入，求出 $F(x)$ 的导数 $F'(x)$，确定 $F'(x)>0, F'(x)<0$ 的解集得单调区间，结合极大值、极小值求出 m 的范围；②由导数求出 x_1,x_2，构造函数 $\varphi(a)=F(x_1)+tF(x_2)$ 并借助导数探讨不等式恒成立即可.

【详解】（1）函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x$，求导得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$，得 $f'(1)=\mathrm{e}-1$，而 $f(1)=\mathrm{e}-1$，

所以切线方程为 $y-(\mathrm{e}-1)=(\mathrm{e}-1)(x-1)$，即 $y=(\mathrm{e}-1)x$.

（2）函数 $F(x)=a(\mathrm{e}^x-x)-\mathrm{e}^{-x}-x$ 的定义域为 R，求导得 $F'(x)=a(\mathrm{e}^x-1)+\mathrm{e}^{-x}-1=\dfrac{(a\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x}$，

①当 $a=\mathrm{e}$ 时，$F(x)=\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}x-\mathrm{e}^{-x}-x$，$F'(x)=\dfrac{(\mathrm{e}^{x+1}-1)(\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x}$，由 $F'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=0$，

当 $x<-1$ 或 $x>0$ 时，$F'(x)>0$，当 $-1<x<0$ 时，$F'(x)<0$，

因此函数 $F(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$，单调减区间为 $(-1,0)$；

极大值 $F(-1)=2$，极小值 $F(0)=\mathrm{e}-1$，

又 $F(1)=\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1=\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1>\dfrac{3}{2}\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1>4-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1>2$，

$F(-2)=\mathrm{e}^{-1}+2\mathrm{e}-\mathrm{e}^2+2=(\mathrm{e}-1)+(\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}+3-\mathrm{e}^2)<\mathrm{e}-1$，

所以函数 $y=F(x)-m$ 有三个零点时 m 的取值范围为 $(\mathrm{e}-1,2)$.

②令 $F'(x)=0$，得 $\mathrm{e}^x=1$ 或 $\mathrm{e}^x=\dfrac{1}{a}>1$，解得 $x=0$ 或 $x=\ln\dfrac{1}{a}=-\ln a>0$，

当 $x<0$ 或 $x>-\ln a$ 时，$F'(x)>0$，当 $0<x<-\ln a$ 时，$F'(x)<0$，

即函数 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,-\ln a)$ 上单调递减，

因此当 $x=0$ 时，$F(x)$ 取得极大值，当 $x=-\ln a$ 时，$F(x)$ 取得极小值，即有 $x_1=0, x_2=-\ln a$，

而 $F(x_1)=F(0)=a-1<0$，$F(x_2)=F(-\ln a)=a(\dfrac{1}{a}+\ln a)-a+\ln a=(a+1)\ln a+1-a<F(x_1)<0$，

又不等式 $F(x_1)+tF(x_2)>0$ 对任意 $a\in(0,1)$ 恒成立，于是 $t<0$，

设 $\varphi(a)=F(x_1)+tF(x_2)=a-1+t[(a+1)\ln a+1-a],a\in(0,1)$，

显然 $\varphi(1)=0$， $\varphi'(a)=1+t(\ln a+\frac{a+1}{a}-1)=1+t(\ln a+\frac{1}{a}),a\in(0,1)$，

令 $m(a)=\ln a+\frac{1}{a},a\in(0,1)$， 求导得 $m'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}=\frac{a-1}{a^2}<0$，

则函数 $m(a)$ 在 $(0,1)$ 上严格递减，有 $m(a)>m(1)=1$，

当 $t\le -1$ 时， $\varphi'(a)\le 1-(\ln a+\frac{1}{a})<0$， 则有函数 $\varphi(a)$ 在 $(0,1)$ 上严格递减， $\varphi(a)>\varphi(1)=0$， 符合题意；

当 $-1<t<0$ 时， 存在 $a_0\in(0,1)$， 使得 $\varphi'(a_0)=0$， 当 $0<a<a_0$ 时， $\varphi'(a)<0$， 当 $a_0<a<1$ 时， $\varphi'(a)>0$，

因此函数 $\varphi(a)$ 在 $(a_0,1)$ 上严格递增，有 $\varphi(a)<\varphi(1)=0$， 不符合题意，

所以实数 t 的取值范围为 $(-\infty,-1]$.

【点睛】思路点睛：不等式恒成立或存在型问题，可构造函数，利用导数研究函数的单调性，求出最值，进而得出相应的含参不等式，从而求出参数的取值范围；也可分离变量，构造函数，直接把问题转化为函数的最值问题.