三角函数与解三角形（三大类型题）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、三角函数

1．（2023·上海长宁·统考一模）设点 P 是以原点为圆心的单位圆上的动点，它从初始位置 $P_0(1,0)$ 出发，沿单位圆按逆时针方向转动角 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 后到达点 P_1，然后继续沿单位圆按逆时针方向转动角 $\dfrac{\pi}{4}$ 到达 P_2．若点 P_2 的横坐标为 $-\dfrac{3}{5}$，则点 P_1 的纵坐标（　　）

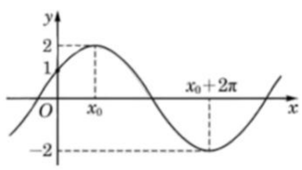
A．$\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$　　D．$\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

2．（2023 上·上海虹口·高三统考期末）已知 $\cos x=-\dfrac{1}{3}$，且 x 为第三象限的角，则 $\tan 2x=$________．

3．（2023·上海青浦·统考一模）已知 α 满足 $\cos\alpha=m$，则 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=$______．(结果用含有 m 的式子表示)．

4．（2023·上海普陀·统考一模）若圆 O 上的一段圆弧长与该圆的内接正六边形的边长相等，则这段圆弧所对的圆心角的大小为______．

5．（2023 上·上海浦东新·高三统考期末）如图，已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0,\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$）的图像与 y 轴的交点为 $(0,1)$，并已知其在 y 轴右侧的第一个最高点和第一个最低点的坐标分别为 $(x_0,2)$ 和 $(x_0+2\pi,-2)$．记 $y=f(x)$，则 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=$____________．



6．（2023·上海嘉定·统考一模）已知 $\tan\alpha=2$，则 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=$____________．

7．（2023·上海普陀·统考一模）若函数 $y=\tan 3x$ 在区间 $\left(m,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 上是严格增函数，则实数 m 的取值范围为______．

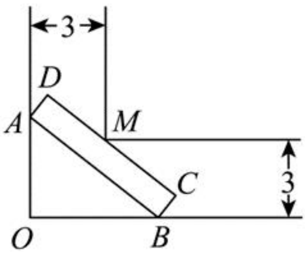
8．（2023·上海闵行·统考一模）若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin(\pi-\alpha)=$________．

9．（2023·上海普陀·统考一模）设函数 $y=\sin(2x+\varphi)$（$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$）的图象与直线 $y=t$ 相交的连续的三个公共点从左到右依次记为 A，B，C，若 $|BC|=2|AB|$，则正实数 t 的值为______．

10．（2023·上海金山·统考一模）已知函数 $y=\sin(\omega x)$（$\omega>0$）在区间 $[0,\pi]$ 上是严格增函数，且其图像关于点 $(4\pi,0)$ 对称，则 ω 的值为________．

11．（2023·上海杨浦·统考一模）函数 $f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\varphi\right)$ $\varphi\in\left(0,2\pi\right)$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 上是单调增函数，且图像关于原点对称，则满足条件的数对 $\left(\omega,\varphi\right)=$________.

12．（2023·上海徐汇·统考一模）某建筑物内一个水平直角型过道如图所示，两过道的宽度均为3米，有一个水平截面为矩形的设备需要水平通过直角型过道．若该设备水平截面矩形的宽 BC 为1米，则该设备能水平通过直角型过道的长 AB 不超过___米．



13．（2023·上海青浦·统考一模）若函数 $y=\cos(x+\phi)$ 是奇函数，则该函数的所有零点是________．

14．（2023上·上海松江·高三统考期末）已知函数 $f(x)=-x^2+6x+m$，$g(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$．对任意 $x_0\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，存在 $x_1,x_2\in[-1,3]$，使得 $f(x_1)\le g(x_0)\le f(x_2)$，则实数 m 的取值范围是________．

15．（2023上·上海虹口·高三统考期末）设 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $\vec{m}=\left(\sin A+\sin B-\sin C,\sin A\right)$，$\vec{n}=\left(c,b+c-a\right)$，且 $\vec{m}\,/\!/\,\vec{n}$．

(1)求角 B 的大小；

(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，求 $y=\sin A+\sin C$ 的值域．

16．（2023·上海闵行·统考一模）在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对边的边长分别为 a、b、c，且 $a-2c\cos B=c$．

(1)若 $\cos B=\dfrac{1}{3}$，$c=3$，求 b 的值；

(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，求 $\sin C$ 的取值范围．

二、三角恒等变换

17．（2023·上海普陀·统考一模）在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $a=\sqrt{3}$，且 $c-2b+2\sqrt{3}\cos C=0$，则该三角形外接圆的半径为（　　）

A．1　　　　B．$\sqrt{3}$　　　　C．2　　　　D．$2\sqrt{3}$

18．（2023·上海闵行·统考一模）若平面上的三个单位向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 满足 $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\left|\vec{a}\cdot\vec{c}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ 的所有可能的值组成的集合为________．

19．（2023上·上海松江·高三统考期末）在 $\triangle ABC$ 中，设角 A,B 及 C 所对边的边长分别为 a,b 及 c，若 $a=3$，$c=5$，$B=2A$，则边长 $b=$________．

20．（2023上·上海松江·高三统考期末）已知$\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$\tan(\theta-\frac{\pi}{4})$的值为________

21．（2023·上海宝山·统考一模）在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c.

(1)若$2a\sin B=\sqrt{3}b$，求角A的大小；

(2)若BC边上的高等于$\frac{a}{2}$，求$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$的最大值.

22．（2023·上海奉贤·统考一模）在$\triangle ABC$中，设角A、B、C所对边的边长分别为a、b、c，已知$\sqrt{3}c=\sqrt{3}b\cos A+a\sin B$.

(1)求角B的大小；

(2)当$a=2\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{3}$时，求边长c和$\triangle ABC$的面积S.

三、解三角形

23．（2023·上海嘉定·统考一模）已知四面体$ABCD,AB=BC,AD=CD$．分别对于下列三个条件：

① $AD\perp BC$；② $AC=BD$；③ $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$，

是$AB\perp CD$的充要条件的共有几个（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

24．(2023·上海青浦·统考一模)在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且满足$a^2+c^2-b^2+ac=0$.

(1)求角B的大小；

(2)若$b=2\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的周长的最大值.

25．（2023上·上海静安·高三校考阶段练习）已知函数$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2\sqrt{3}\cos^2x+\sqrt{3}$.

(1)求函数$y=f(x)$的最小正周期及函数在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值；

(2)在△ABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$f\left(\frac{A}{2}\right)=\sqrt{3}$，$a=\sqrt{3}$，$c=1$，求$\sin B$的值.

26．（2023上·上海浦东新·高三上海中学东校校考期中）在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对应的边分别为a,b,c，且$a+b=11$，$c=7$，$\cos A=-\frac{1}{7}$．求：

(1)a的值；

(2)$\sin C$和$\triangle ABC$的面积.

27．（2023·上海嘉定·统考一模）已知三角形ABC，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=1$，三角形的面积$S=\frac{1}{2}$，

(1)求角C的值；

(2)若$\sin A\cos A=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$a=2$求$c$.

三角函数与解三角形（三大类型题）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、三角函数

1．（2023·上海长宁·统考一模）设点 P 是以原点为圆心的单位圆上的动点，它从初始位置 $P_0(1,0)$ 出发，沿单位圆按逆时针方向转动角 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 后到达点 P_1，然后继续沿单位圆按逆时针方向转动角 $\frac{\pi}{4}$ 到达 P_2．若点 P_2 的横坐标为 $-\frac{3}{5}$，则点 P_1 的纵坐标（　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{5}$　　C．$\frac{3\sqrt{2}}{5}$　　D．$\frac{7\sqrt{2}}{10}$

【答案】D

【分析】由 P_2 在单位圆上，得到 P_2 的坐标，再根据三角函数的定义得出 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值，从而求出 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值，再运用两角差的正弦公式求解.

【详解】由题可知 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{5}$，且 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，

因为 $\frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，可知 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$

则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin\alpha=\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

故选：D.

2．（2023 上·上海虹口·高三统考期末）已知 $\cos x=-\frac{1}{3}$，且 x 为第三象限的角，则 $\tan 2x=$________.

【答案】 $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$/$-\frac{4}{7}\sqrt{2}$

【分析】根据已知条件求得 $\tan x$，再结合正切二倍角公式即可求解.

【详解】因为 $\cos x=-\frac{1}{3}$，且 x 为第三象限的角，

所以 $\sin x=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=2\sqrt{2}$，

所以 $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{4\sqrt{2}}{1-8}=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$.

故答案为：$-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

3.（2023·上海青浦·统考一模）已知 α 满足 $\cos\alpha=m$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=$______.（结果用含有 m 的式子表示）.

【答案】m

【分析】根据诱导公式化简求值.

【详解】有诱导公式可知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha=m$，

故答案为：m.

4.（2023·上海普陀·统考一模）若圆 O 上的一段圆弧长与该圆的内接正六边形的边长相等，则这段圆弧所对的圆心角的大小为______.

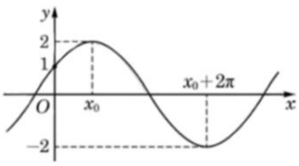
【答案】1 弧度

【分析】根据弧度的定义求解即可.

【详解】圆的内接正六边形的边长等于圆半径，弧长等于半径的弧所对圆心角为 1 弧度角.

故答案为：1 弧度.

5.（2023 上·上海浦东新·高三统考期末）如图，已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}$）的图像与 y 轴的交点为 $(0,1)$，并已知其在 y 轴右侧的第一个最高点和第一个最低点的坐标分别为 $(x_0,2)$ 和 $(x_0+2\pi,-2)$. 记 $y=f(x)$，则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=$____________.



【答案】$\sqrt{3}$

【分析】由图象可知 $A=2$ 且 $T=4\pi$，根据 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 求出 ω，将点 $(0,1)$ 代入 $f(x)$ 解析式求出 φ，进而求出 $f(x)$ 的解析式，即可求解.

【详解】由题意知，函数 $f(x)$ 图象在 y 轴的右侧的第一个最高点和第一个最低点的坐标分别为 $(x_0,2),(x_0+2\pi,-2)$，

则 $A=2$，且 $(x_0+2\pi)-x_0=\frac{T}{2}$，得 $T=4\pi$，

又 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}$，

所以 $f(x)=2\sin(\frac{1}{2}x+\varphi)$，又函数图象过点 $(0,1)$，

所以 $1=2\sin(0+\varphi)$，由 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ 解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

故 $f(x)=2\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6})$，

所以 $f(\frac{\pi}{3})=2\sin(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

故答案为：$\sqrt{3}$

6．（2023·上海嘉定·统考一模）已知 $\tan\alpha=2$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=$____________.

【答案】$-\frac{1}{2}$/-0.5

【分析】根据题意，结合三角函数的诱导公式，即可求解.

【详解】因为 $\tan\alpha=2$，根据三角函数的诱导公式，

可得 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})}{\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{1}{2}$.

故答案为：$-\frac{1}{2}$.

7．（2023·上海普陀·统考一模）若函数 $y=\tan 3x$ 在区间 $\left(m,\frac{\pi}{6}\right)$ 上是严格增函数，则实数 m 的取值范围为______.

【答案】$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$

【分析】解出正切型函数单调区间，则得到 m 的范围.

【详解】令 $k\pi-\frac{\pi}{2}<3x<k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，解得 $\frac{k\pi}{3}-\frac{\pi}{6}<x<\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$，$k\in Z$，

令 $k=0$，则其一个单调增区间为 $-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}$，则实数 m 的取值范围为 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$，

故答案为：$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$.

8．（2023·上海闵行·统考一模）若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\sin(\pi-\alpha)=$________.

【答案】$\frac{1}{3}$

【分析】根据三角函数诱导公式，即可求得答案.

【详解】由于 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\frac{1}{3}$，

故答案为：$\frac{1}{3}$

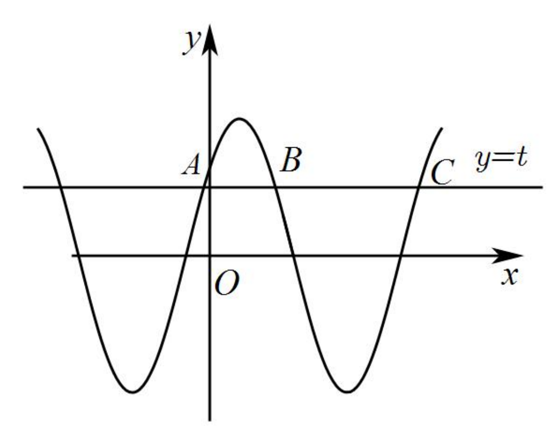
9．（2023·上海普陀·统考一模）设函数 $y=\sin\left(2x+\varphi\right)$（$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$）的图象与直线 $y=t$ 相交的连续的三个公共点从左到右依次记为 A，B，C，若 $\left|BC\right|=2\left|AB\right|$，则正实数 t 的值为______.

【答案】$\frac{1}{2}$/0.5

【分析】作出正弦型三角函数的图象，利用其对称性和周期性求出 A 点横坐标，再代入计算即可.

【详解】作出函数 $y=\sin\left(2x+\varphi\right)$，的大致图象，如图，令 $2x+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

解得 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$，$k\in Z$，



则函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象与直线 $y=t(0<t<1)$ 连续的三个公共点 A，B，C，（可以同时往左或往右移动正整数倍周期长度）

即 A，B 关于直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$，$k\in Z$ 对称，$|AC|=T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

由于 $\left|BC\right|=2\left|AB\right|$，故 $|AB|=\frac{1}{3}|AC|=\frac{\pi}{3}$，

而 A，B 关于直线 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$，$k\in Z$ 对称，

故 A 点横坐标为 $k\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{12}-\frac{\varphi}{2}$，

将 A 点横坐标代入 $y=\sin\left(2x+\varphi\right)$，得 $\sin(\frac{\pi}{6}+2k\pi)=t=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.

10．（2023·上海金山·统考一模）已知函数 $y=\sin(\omega x)$（$\omega>0$）在区间 $[0,\pi]$ 上是严格增函数，且其图像关于点 $\left(4\pi,0\right)$ 对称，则 ω 的值为________.

【答案】$\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{2}$

【分析】根据增函数和对称中心特征，求出 ω 范围，进而得到答案.

【详解】因为 $x\in[0,\pi]$，则 $\omega x\in\left[0,\omega\pi\right]$，函数 $y=\sin(\omega x)$（$\omega>0$）在区间 $[0,\pi]$ 上是严格增函数，

所以$0<\omega\pi\le\frac{\pi}{2}$，即$0<\omega\leqslant\frac{1}{2}$；

又因为$y=\sin(\omega x)$的图像关于点$(4\pi,0)$对称，则$\omega x=k\pi$（$k\in Z$），则$x=\frac{k\pi}{\omega}$（$k\in Z$），

所以$4\pi=\frac{k\pi}{\omega}$（$k\in Z$），解得$\omega=\frac{k}{4}$（$k\in Z$），

结合$0<\omega\leqslant\frac{1}{2}$，所以$\omega=\frac{1}{4}$或$\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{4}$或$\frac{1}{2}$.

11．（2023·上海杨浦·统考一模）函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ $\varphi\in(0,2\pi)$在$x\in\mathbf{R}$上是单调增函数，且图像关于原点对称，则满足条件的数对$(\omega,\varphi)=$________.

【答案】$\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$

【分析】由函数在R上单调增得出$\omega=0$，再由函数图像关于原点对称得出$f(x)=\cos\varphi=0$，即可得出答案.

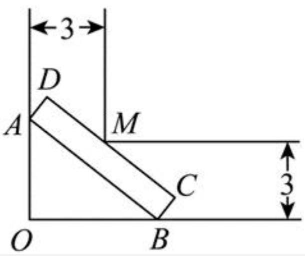
【详解】当$\omega\ne0$时，$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ $\varphi\in(0,2\pi)$在$x\in\mathbf{R}$上必有增有减，不合题意，

故$\omega=0$，此时$f(x)=\cos\varphi$ $\varphi\in(0,2\pi)$，为常值函数，由其图像关于原点对称，

所以$f(x)=\cos\varphi=0$，所以$\varphi=\frac{\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}$，故满足条件的数对为$\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$，

故答案为：$\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.

12．（2023·上海徐汇·统考一模）某建筑物内一个水平直角型过道如图所示，两过道的宽度均为3米，有一个水平截面为矩形的设备需要水平通过直角型过道．若该设备水平截面矩形的宽BC为1米，则该设备能水平通过直角型过道的长AB不超过___米.



【答案】$6\sqrt{2}-2$

【分析】建立平面直角坐标系，利用直线AB的方程求得设备的长AB的表达式，再利用均值定理求得AB的最小值，进而得到该设备能水平通过直角型过道时AB不超过的值.

【详解】分别以OB,OA所在直线为x,y轴建立平面直角坐标系如图，

则$M(3,3)$，令$A(0,b),B(a,0),(a>0,b>0)$，

则直线 AB 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，

则 M 在直线 AB 的上方，且 M 到直线 AB 的距离为 1，

即 $\begin{cases}\frac{3}{a}+\frac{3}{b}>1\\ \frac{\left|\frac{3}{a}+\frac{3}{b}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}}=1\end{cases}$， 则 $\frac{3}{a}+\frac{3}{b}-1=\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}$，

整理得 $\sqrt{a^2+b^2}=3(a+b)-ab$，

设 $|AB|=r,\angle OAB=\theta,\left(r>0,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$，则 $a=r\sin\theta,b=r\cos\theta$，

则 $\sqrt{a^2+b^2}=3(a+b)-ab$ 可化为 $r=3r(\sin\theta+\cos\theta)-r^2\sin\theta\cos\theta$，

令 $t=\sin\theta+\cos\theta\left(\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$，则 $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[1,\sqrt{2}\right]$，则

$$r=\frac{3(\sin\theta+\cos\theta)-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{3t-1}{\frac{t^2-1}{2}}=2\times\frac{1}{\frac{\frac{1}{9}(3t-1)^2+\frac{2}{9}(3t-1)-\frac{8}{9}}{3t-1}}$$

$$=\frac{18}{(3t-1)-\frac{8}{3t-1}+2},$$

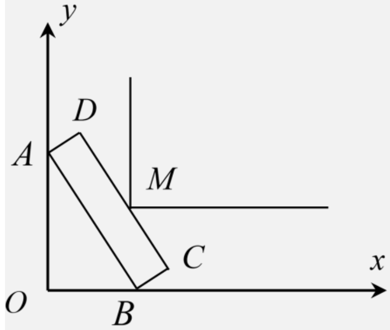
由 $t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$，得 $3t-1\in\left[2,3\sqrt{2}-1\right]$，

又 $y=x-\frac{8}{x}+2$ 在 $\left[2,3\sqrt{2}-1\right]$ 上单调递增，

则 $(3t-1)-\frac{8}{3t-1}+2\le 3\sqrt{2}-1-\frac{8}{3\sqrt{2}-1}+2=\frac{9}{3\sqrt{2}-1}$，

则 $\frac{18}{(3t-1)-\frac{8}{3t-1}+2}\ge 2\left(3\sqrt{2}-1\right)$（当且仅当 $t=\sqrt{2}$ 时等号成立）

则该设备能水平通过直角型过道的长 AB 不超过 $2\left(3\sqrt{2}-1\right)$ 米



故答案为：$2\left(3\sqrt{2}-1\right)$

13．（2023·上海青浦·统考一模）若函数 $y=\cos(x+\phi)$ 是奇函数，则该函数的所有零点是________．

【答案】$x=k\pi,k\in Z$；

【分析】根据函数为奇函数进行求解即可．

【详解】因为函数 $y=\cos(x+\phi)$ 是奇函数，

所以 $0+\phi=\dfrac{\pi}{2}+k_1\pi,k_1\in Z$，即 $\phi=\dfrac{\pi}{2}+k_1\pi,k_1\in Z$，

则 $y=\cos(x+\phi)=0$，

得 $x+\phi=\dfrac{\pi}{2}+k_2\pi,k_2\in Z\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k_2\pi-\phi=\left(k_2-k_1\right)\pi$，

则 $x=\left(k_2-k_1\right)\pi=k\pi$，其中 $k=k_2-k_1\in Z$，

所以该函数的所有零点是 $x=k\pi,k\in Z$．

故答案为：$x=k\pi,k\in Z$

14．（2023上·上海松江·高三统考期末）已知函数 $f(x)=-x^2+6x+m$，$g(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$．对任意 $x_0\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，存在 $x_1,x_2\in[-1,3]$，使得 $f(x_1)\le g(x_0)\le f(x_2)$，则实数 m 的取值范围是________．

【答案】$[-7,8]$

【分析】根据 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的值域以及恒成立、存在性等知识求得 m 的取值范围．

【详解】$0\le x\le\dfrac{\pi}{4},0\le 2x\le\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3}\le 2x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{5\pi}{6}$，

所以 $g(x)=2\sin\left(2+\dfrac{\pi}{3}\right)\in[1,2]$．

$f(x)=-x^2+6x+m$ 的开口向下，对称轴为 $x=3$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上单调递增，$f(-1)=m-7,f(3)=m+9$，

所以 $f(x)\in[m-7,m+9]$，

由于任意 $x_0\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，存在 $x_1,x_2\in[-1,3]$，使得 $f(x_1)\le g(x_0)\le f(x_2)$，

所以 $\begin{cases}m-7\le 1\\ m+9\ge 2\end{cases}$，解得 $-7\le m\le 8$，所以 m 的取值范围是 $[-7,8]$．

故答案为：$[-7,8]$

15．（2023上·上海虹口·高三统考期末）设 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $\vec{m}=\left(\sin A+\sin B-\sin C,\sin A\right)$，$\vec{n}=\left(c,b+c-a\right)$，且 $\vec{m}\parallel\vec{n}$．

(1)求角 B 的大小；

(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，求 $y=\sin A+\sin C$ 的值域.

【答案】(1) $B=\frac{\pi}{3}$

(2) $\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}\right]$

【分析】（1）根据向量平行得到 $(\sin A+\sin B-\sin C)(b+c-a)=c\sin A$，结合正弦定理化简得到 $a^2+c^2-b^2=ac$，进而根据余弦定理求得 $\cos B$ 即可得到答案；

（2）根据 $C=\pi-A-B=\frac{2\pi}{3}-A$ 化简函数，得到原函数即为 $\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$，结合锐角三角形得到 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$ 进而即可得到答案.

【详解】（1）因为 $\vec{m}=(\sin A+\sin B-\sin C,\sin A)$，$\vec{n}=(c,b+c-a)$，且 $\vec{m}\,//\,\vec{n}$，

所以 $(\sin A+\sin B-\sin C)(b+c-a)=c\sin A$，

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，

所以 $(b+a-c)(b+c-a)=ac$，

所以 $b^2-(a-c)^2=ac$，化简得 $a^2+c^2-b^2=ac$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$

（2）由（1）得，$B=\frac{\pi}{3}$，所以 $C=\pi-A-B=\frac{2\pi}{3}-A$，

所以 $y=\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\sin A+\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$

$=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$，

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2}\\0<C=\frac{2\pi}{3}-A<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\leq 1$，则 $\frac{3}{2}<\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\leq\sqrt{3}$

即 $y=\sin A+\sin C$ 的值域为 $\left(\frac{3}{2},\sqrt{3}\right]$

16．(2023·上海闵行·统考一模)在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对边的边长分别为 a、b、c，且 $a-2c\cos B=c$.

(1)若 $\cos B=\frac{1}{3}$， $c=3$，求 b 的值；

(2)若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，求 $\sin C$ 的取值范围．

【答案】(1) $b=2\sqrt{6}$

(2) $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

【分析】（1）由已知条件可得出 a 的值，再利用余弦定理可求得 b 的值；

（2）利用正弦定理以及两角和与差的正弦公式化简得出 $B=2C$，再利用 $\triangle ABC$ 为锐角三角形求出角 C 的取值范围，即可求得 $\sin C$ 的取值范围．

【详解】（1）因为 $\cos B=\frac{1}{3}$， $c=3$， $a-2c\cos B=c$，所以， $a=2c\cos B+c=2\times3\times\frac{1}{3}+3=5$，

由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=25+9-2\times5\times3\times\frac{1}{3}=24$，故 $b=2\sqrt{6}$．

（2）因为 $a-2c\cos B=c$，由正弦定理可得 $\sin A-2\sin C\cos B=\sin C$，

即 $\sin C=\sin\left(B+C\right)-2\cos B\sin C=\sin B\cos C+\cos B\sin C-2\cos B\sin C$

$=\sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin\left(B-C\right)$，

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 A、 B、 $C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以， $B-C\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，

因为正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上为增函数，所以， $C=B-C$，即 $B=2C$，

由 $\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2}\\0<B=2C<\frac{\pi}{2}\\0<A=\pi-3C<\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 可得 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{4}$，故 $\frac{1}{2}<\sin C<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因此， $\sin C$ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$．

二、三角恒等变换

17．（2023·上海普陀·统考一模）在 $\triangle ABC$ 中，角 A， B， C 所对的边分别为 a， b， c，若 $a=\sqrt{3}$，且 $c-2b+2\sqrt{3}\cos C=0$，则该三角形外接圆的半径为（　）

A． 1　　B． $\sqrt{3}$　　C． 2　　D． $2\sqrt{3}$

【答案】A

【分析】先应用正弦定理及两角和的正弦公式化简求出角 A,再根据正弦定理求出外接圆半径即可.

【详解】$\because a=\sqrt{3},\therefore c-2b+2a\cos C=0,\therefore \sin C-2\sin B+2\sin A\cos C=0$.

$\therefore \sin C-2\sin(A+C)+2\sin A\cos C=0$,

$\therefore \sin C-2\sin A\cos C-2\sin C\cos A+2\sin A\cos C=0$,

$\therefore \sin C-2\sin C\cos A=0, \because \sin C>0, \therefore \cos A=\dfrac{1}{2}, A\in(0,\pi)$,

$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$, 设该三角形外接圆的半径为 r

由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2=2r$, $\therefore r=1$

故选：A.

18．（2023·上海闵行·统考一模）若平面上的三个单位向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=\dfrac{1}{2}$，$|\vec{a}\cdot\vec{c}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ 的所有可能的值组成的集合为________.

【答案】$\left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

【分析】不妨设 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\vec{c}=(\cos\beta,\sin\beta)$，其中 α、$\beta\in[-\pi,\pi)$，根据平面向量数量积的坐标运算可得出 α、β 的值，求出 $\alpha-\beta$ 的值，再利用平面向量数量积的坐标运算结合两角差的余弦公式可求得 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ 的值.

【详解】不妨设 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\vec{c}=(\cos\beta,\sin\beta)$，其中 α、$\beta\in[-\pi,\pi)$，

则 $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\cos\alpha|=\dfrac{1}{2}$，所以，$\alpha=\pm\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\pm\dfrac{2\pi}{3}$，

$|\vec{a}\cdot\vec{c}|=|\cos\beta|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以，$\beta=\pm\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\pm\dfrac{5\pi}{6}$，

所以，$\alpha-\beta\in\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{6},-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{7\pi}{6},-\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{3\pi}{2}\right\}$，

因为 $\vec{b}\cdot\vec{c}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$，

当 $\alpha-\beta\in\left\{\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{3\pi}{2}\right\}$ 时，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\cos(\alpha-\beta)=0$；

当 $\alpha-\beta\in\left\{\dfrac{\pi}{6},-\dfrac{\pi}{6}\right\}$ 时，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

当 $\alpha-\beta\in\left\{\dfrac{7\pi}{6},-\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6},-\dfrac{5\pi}{6}\right\}$ 时，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ 的所有可能的值组成的集合为 $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

故答案为：$\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

19．（2023上·上海松江·高三统考期末）在 $\triangle ABC$ 中，设角 A,B 及 C 所对边的边长分别为 a,b 及 c，若 $a=3$，$c=5$，$B=2A$，则边长 $b=$________.

【答案】$2\sqrt{6}$

【分析】利用正弦定理以及三角恒等变换求得 $\cos A$，再次利用正弦定理求得 b.

【详解】由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{c}{\sin(A+B)}$，即 $\frac{3}{\sin A}=\frac{5}{\sin 3A}$，

$5\sin A=3\sin 3A=3\sin A\cos 2A+3\cos A\sin 2A$

$=3\sin A\left(2\cos^2 A-1\right)+6\sin A\cos^2 A=12\sin A\cos^2 A-3\sin A$，

由于 $B=2A$，所以A为锐角，$\sin A>0$，

所以 $12\cos^2 A=8,\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{b}{\sin 2A}=\frac{b}{2\sin A\cos A}$，

则 $a=\frac{b}{2\cos A},b=2a\cos A=2\times 3\times\frac{\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{6}$.

故答案为：$2\sqrt{6}$

20．（2023上·上海松江·高三统考期末）已知 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})$ 的值为________

【答案】$-\frac{1}{7}$

【分析】先求得 $\tan\theta$，然后利用两角差的正切公式求得正确答案.

【详解】由于 $\sin\theta=\frac{3}{5}$，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，

所以 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{4}{5}$，

所以 $\tan\theta=\frac{3}{4}$，所以 $\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{3}{4}-1}{1+\frac{3}{4}}=-\frac{1}{7}$.

故答案为：$-\frac{1}{7}$

21．（2023·上海宝山·统考一模）在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c.

(1)若 $2a\sin B=\sqrt{3}b$，求角A的大小；

(2)若 BC 边上的高等于 $\frac{a}{2}$，求 $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$ 的最大值.

【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

(2) $2\sqrt{2}$

【分析】（1）利用正弦定理的边角变换，结合特殊角的三角函数值即可得解；

（2）利用三角形面积公式与余弦定理得到 $b^2+c^2=2bc(\sin A+\cos A)$，从而将 $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$ 转化为关于角A的表达式，进而得解.

【详解】（1）因为 $2a\sin B=\sqrt{3}b$，由正弦定理得 $2\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B$，

又 $0<B<\pi$，则 $\sin B\neq 0$，所以 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$ 或 $A=\frac{2\pi}{3}$.

（2）由三角形面积公式得 $\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}bc\sin A$，即 $a^2=2bc\sin A$，

又由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $2bc\sin A=b^2+c^2-2bc\cos A$，

从而有 $b^2+c^2=2bc(\sin A+\cos A)$，

所以 $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}=\frac{b^2+c^2}{bc}=2(\sin A+\cos A)=2\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$.

当 $A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{4}$ 时，$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$ 有最大值 $2\sqrt{2}$，

即 $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$.

22．（2023·上海奉贤·统考一模）在 $\triangle ABC$ 中，设角 A 、B 、C 所对边的边长分别为 a 、b 、c，已知 $\sqrt{3}c=\sqrt{3}b\cos A+a\sin B$.

(1)求角 B 的大小；

(2)当 $a=2\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{3}$ 时，求边长 c 和 $\triangle ABC$ 的面积 S .

【答案】(1) $B=\frac{\pi}{3}$

(2) $c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$S_{\triangle ABC}=3+\sqrt{3}$

【分析】（1）借助正弦定理将边化为角，结合 $C=\pi-(A+B)$ 及两角和的正弦公式计算化简即可得；

（2）根据正弦定理即可计算出 A，结合 B 可求出 C，再试用正弦定理即可得到 c，再使用用面积公式即可得到面积.

【详解】（1）由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin C=\sqrt{3}\sin B\cos A+\sin A\sin B$，

由于 $C=\pi-(A+B)$，则 $\sqrt{3}\sin(A+B)=\sqrt{3}\sin B\cos A+\sin A\sin B$ ，

展开得 $\sqrt{3}\sin A\cos B+\sqrt{3}\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin B\cos A+\sin A\sin B$ ，

化简得 $\sqrt{3}\cos B=\sin B$，

则 $\tan B=\sqrt{3}$，

所以 $B=\frac{\pi}{3}$；

（2）由正弦定理，得 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即有 $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为 $a<b$，所以 A 是锐角，即 $A=\frac{\pi}{4}$，

因为 $A+C=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $C=\frac{5\pi}{12}$，

$c=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\times\sin C=4\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}\right)=4\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{2}\times\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=3+\sqrt{3}$.

三、解三角形

23.（2023·上海嘉定·统考一模）已知四面体 $ABCD, AB=BC, AD=CD$． 分别对于下列三个条件：

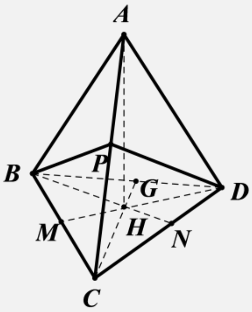
① $AD\perp BC$；② $AC=BD$；③ $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$，

是 $AB\perp CD$ 的充要条件的共有几个（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】C

【分析】根据题意，逐项分析判断即可.

【详解】

取线段 AC 中点 P，连接 BP,DP，

因为 $AB=BC,AD=CD$，

所以 $AC\perp BP,AC\perp DP$，

又 $BP\cap DP=P$，$BP\subset$平面 BDP，$DP\subset$平面 BDP，

所以 $AC\perp$平面 BDP，所以 $AC\perp BD$，

过 A 作 AH $\perp$平面 BCD，

连接 DH,BH,CH 并延长分别交 BC,CD,BD 于 M,N,G，

则 $AH\perp BD$，$AH\cap AC=A$，

所以 $BD\perp$平面 ACH，$CH\subset$平面 ACH，

所以 $BD\perp CH$，

对于①，若 $AD\perp BC$，又 $AD\perp AH$，$AH\cap AD=A$，

则 $BC\perp$平面 ADH，则 $BC\perp DH$，

所以点 H 为三角形 BCD 垂心，

则 $CD\perp BH$，又 $CD\perp AH$，

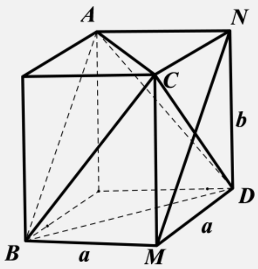
同理可知 $CD\perp$平面 ABH，$AB\subset$平面 ABH，

所以 $AB\perp CD$.

若已知 $AB\perp CD$，同理可证 $AD\perp BC$，

所以 $AD\perp BC$ 是 $AB\perp CD$ 的充要条件，①正确；

对于②，在如图立方体中，设 $BM=MD=a,DN=b$，



则易知四面体 $ABCD,AB=BC,AD=CD$，且 $AC=BD=\sqrt{2}a$，

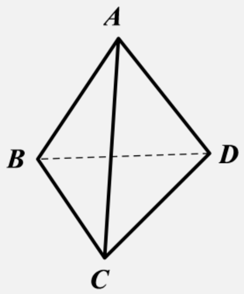
易知 $AB // MN$，若使 $AB \perp CD$ 则需 $AB \perp MN$，而在矩形 $NCMD$ 中，

当且仅当 $a = b$ 时，$AB \perp MN$，

所以在四面体 $ABCD, AB = BC, AD = CD$ 中，$AC = BD$ 不为 $AB \perp CD$ 的充要条件，

所以②错误；

对于③，在四面体 $ABCD, AB = BC, AD = CD$ 中，



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos\angle BAD - \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\angle BAC$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\dfrac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} - \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$

$= \dfrac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2} - \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \dfrac{BC^2 + AD^2 - BD^2 - AC^2}{2}$

因为 $AB = BC, AD = CD$，

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \dfrac{BC^2 + AD^2 - BD^2 - AC^2}{2} = \dfrac{AB^2 + CD^2 - BD^2 - AC^2}{2}$

所以若 $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$，即 $AB \perp CD$，

若 $AB \perp CD$，即 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \dfrac{AB^2 + CD^2 - BD^2 - AC^2}{2} = 0$，

则 $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$，

所以 $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$ 为 $AB \perp CD$ 的充要条件，③正确；

故选：C

24．（2023·上海青浦·统考一模）在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足 $a^2 + c^2 - b^2 + ac = 0$．

(1)求角 B 的大小；

(2)若 $b = 2\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的周长的最大值．

【答案】(1) $B = \dfrac{2\pi}{3}$

(2) $4 + 2\sqrt{3}$

【分析】（1）根据余弦定理可得 B 的大小；

（2）边角互化，可得 $a+b+c=4\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}$，结合三角函数的性质可得最值.

【详解】（1）由 $a^2+c^2-b^2+ac=0$，可得 $a^2+c^2-b^2=-ac$，

所以 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{-ac}{2ac}=-\dfrac{1}{2}$，

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{2\pi}{3}$.

（2）由（1）得 $B=\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

则由正弦定理可得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}=4$，

即 $a=4\sin A$，$c=4\sin C$，

所以 $\triangle ABC$ 的周长 $a+b+c=4\sin A+4\sin C+2\sqrt{3}$，

又在 $\triangle ABC$ 中，$C=\pi-A-B=\dfrac{\pi}{3}-A$，

则 $a+b+c=4\sin A+4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-A\right)+2\sqrt{3}=4\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}$，

又在 $\triangle ABC$ 中，$\begin{cases}0<A<\pi\\0<\dfrac{\pi}{3}-A<\pi\end{cases}$，所以 $0<A<\dfrac{\pi}{3}$，

所以当 $A=\dfrac{\pi}{6}$ 时，周长取最大值为 $4+2\sqrt{3}$.

25.（2023 上·上海静安·高三校考阶段练习）已知函数 $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)-2\sqrt{3}\cos^2x+\sqrt{3}$.

(1)求函数 $y=f(x)$ 的最小正周期及函数在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值；

(2)在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $f\left(\dfrac{A}{2}\right)=\sqrt{3}$，$a=\sqrt{3}$，$c=1$，求 sin$B$ 的值.

【答案】(1)最小正周期为 π，最大值为 2；

(2) $\sin B=\dfrac{1}{2}$.

【分析】（1）根据诱导公式及辅助角公式对 $y=f(x)$ 进行化简，进而求得最小正周期及在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值；

（2）根据 $f\left(\dfrac{A}{2}\right)=\sqrt{3}$ 求得 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，根据余弦定理求出 b，再根据正弦定理即可求得 sin$B$ 的值.

【详解】（1）$f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)-2\sqrt{3}\cos^2x+\sqrt{3}=\sin 2x-2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\sqrt{3}$

$=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

所以函数 $y=f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$，

所以当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ 即 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时，$y=f(x)$ 取得最大值，且 $f(x)_{\max}=f(\frac{5\pi}{12})=2\sin\frac{\pi}{2}=2$．

（2）$f\left(\frac{A}{2}\right)=2\sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$，则 $\sin\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

因为 $0<A<\pi$，则 $-\frac{\pi}{3}<A-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$．

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，可得 $b^2+b-2=0$，解得 $b=1$ 或 $b=-2$（舍）．

根据正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{1}{2}$．

26．（2023 上·上海浦东新·高三上海中学东校校考期中）在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c，且 $a+b=11$，$c=7$，$\cos A=-\frac{1}{7}$．求：

(1)a 的值；

(2)$\sin C$ 和 $\triangle ABC$ 的面积．

【答案】(1)$a=8$

(2)故 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$

【分析】（1）应用余弦定理列方程求值即可；

（2）由同角三角函数平方关系求 $\sin A$，应用正弦定理求 $\sin C$，三角形面积公式求 $\triangle ABC$ 的面积.

【详解】（1）因为 $a+b=11$，$c=7$，$\cos A=-\frac{1}{7}$，

所以，由余弦定理得：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(11-a)^2+7^2-a^2}{2\times(11-a)\times 7}=\frac{85-11a}{77-7a}=-\frac{1}{7}$，解得 $a=8$．

故 $a=8$．

（2）由 $\cos A=-\frac{1}{7},A\in(0,\pi)$，则 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

由正弦定理得 $\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{7\times\frac{4\sqrt{3}}{7}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $a+b=11,a=8$，得 $b=3$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=6\sqrt{3}$．

故 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$．

27．（2023·上海嘉定·统考一模）已知三角形 ABC，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=1$，三角形的面积 $S=\frac{1}{2}$，

(1)求角 C 的值；

(2)若 $\sin A\cos A=\frac{\sqrt{3}}{4}$， $a=2$ 求 c .

【答案】(1) $C=\frac{\pi}{4}$

(2) $c=2\sqrt{2}$ 或 $c=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

【分析】(1)根据 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=1$ 求得 $|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|=\frac{1}{\cos C}$， 根据 $S=\frac{1}{2}$， 求得 $|CA|\cdot|CB|=\frac{1}{\sin C}$， 联立两式求角 C 的值；

(2)由 $\sin A\cos A=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 求得 $\sin 2A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，结合 A 角的范围与 $\sin 2A$ 的正负确定 A 角的值，分两种情况利用正弦定理求 c 值.

【详解】(1) 根据 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=1$， 有 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos C=1$， 即 $|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|=\frac{1}{\cos C}$，

又因为 $S=\frac{1}{2}$， $S=\frac{1}{2}|CA|\cdot|CB|\cdot\sin C=\frac{1}{2}$， 即 $|CA|\cdot|CB|=\frac{1}{\sin C}$，

所以 $\frac{1}{\sin C}=\frac{1}{\cos C}$， 所以 $\sin C=\cos C$， 即 $\tan C=1$，

因为 $C\in(0,\pi)$， 所以 $C=\frac{\pi}{4}$

(2) 由 $\sin A\cos A=\frac{\sqrt{3}}{4}$， 有 $\frac{1}{2}(2\sin A\cos A)=\frac{\sqrt{3}}{4}$， $\sin 2A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又因为 $A\in(0,\pi),2A\in(0,2\pi)$， 结合 $\sin 2A=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$， 有 $2A\in(0,\pi)$， 即 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $2A=\frac{\pi}{3}$ 或 $2A=\frac{2\pi}{3}$， 即 $A=\frac{\pi}{6}$ 或 $A=\frac{\pi}{3}$；

因为 $C=\frac{\pi}{4}$， $A+C<\pi$， 两值都符合题意，所以：

当 $A=\frac{\pi}{6}$， 由正弦定理有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

即 $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{c}{\sin\frac{\pi}{4}}$， $\frac{2}{\frac{1}{2}}=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$， 解得 $c=2\sqrt{2}$；

当 $A=\frac{\pi}{3}$， 由正弦定理有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

即 $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{c}{\sin\frac{\pi}{4}}$， $\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$， 解得 $c=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

综上： $A=\frac{\pi}{6}$ 时， $c=2\sqrt{2}$； $A=\frac{\pi}{3}$ 时， $c=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.