数列（四大类型题）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、等差数列

1.（2023·上海嘉定·统考一模）已知等差数列$\{a_n\}$，公差为$d, f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|$，则下列命题正确的是（　）

A．函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$可能是奇函数

B．若函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$是偶函数，则$d=0$

C．若$d=0$，则函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$是偶函数

D．若$d\neq 0$，则函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$的图象是轴对称图形

2.（2023·上海闵行·统考一模）已知$f(x)=x^2-8x+10$，$x\in\mathbf{R}$，数列$\{a_n\}$是公差为1的等差数列，若$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)$的值最小，则$a_1=$________.

3.（2023·上海宝山·统考一模）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_4+a_{13}=1$则$S_{16}=$________

4.（2023·上海普陀·统考一模）设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和$(n\geq 1, n\in\mathbf{N})$，若$a_2+a_4=9-a_6$，则$S_7=$______.

5.（2023上·上海浦东新·高三统考期末）已知S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_n=2n-3$，则满足$S_m=24$的正整数m的值为____________.

6.（2023·上海青浦·统考一模）已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=|n-18|$，记$S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$，若$S_{n+30}-S_n=225$，则正整数n的值为____________.

7.（2023·上海普陀·统考一模）若数列$\{a_n\}$满足$a_1=12$，$a_{n+1}=a_n+2n$（$n\geq 1$，$n\in\mathrm{N}$），则$\frac{a_n}{n}$的最小值是______.

8.（2023·上海杨浦·统考一模）等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1+a_2=6$，$a_2+a_3=10$，则$\{a_n\}$的前10项和为________.

9.（2023·上海嘉定·统考一模）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n, S_n=n^2+n$，其中$n\in\mathrm{N}, n\geq 1$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$H_n$.

10．（2023·上海长宁·统考一模）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公差$d=2$.

(1)若$S_{10}=100$，求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)从集合$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$中任取3个元素，记这3个元素能成等差数列为事件A，求事件A发生的概率$P(A)$.

11．（2023·上海崇明·统考一模）已知$f(x)=mx+\sin x\,(m\in\mathrm{R},m\neq0)$.

(1)若函数$y=f(x)$是实数集R上的严格增函数，求实数m的取值范围；

(2)已知数列$\{a_n\}$是等差数列（公差$d\neq0$），$b_n=f(a_n)$. 是否存在数列$\{a_n\}$使得数列$\{b_n\}$是等差数列？若存在，请写出一个满足条件的数列$\{a_n\}$，并证明此时的数列$\{b_n\}$是等差数列；若不存在，请说明理由；

(3)若$m=1$，是否存在直线$y=kx+b$满足：①对任意的$x\in\mathbf{R}$都有$f(x)\geq kx+b$成立，②存在$x_0\in\mathbf{R}$使得$f(x_0)=kx_0+b$？若存在，请求出满足条件的直线方程；若不存在，请说明理由.

二、等比数列

12．（2023·上海金山·统考一模）设集合$A=\{1,2,\cdots,100\}$，X、Y均为A的非空子集（允许$X=Y$）. X中的最大元素与Y中的最小元素分别记为M,m，则满足$M>m$的有序集合对(X,Y)的个数为（　）.

A．$2^{200}-100\cdot2^{100}$　B．$2^{200}-101\cdot2^{100}$　C．$2^{201}-100\cdot2^{100}$　D．$2^{201}-101\cdot2^{100}$

13．（2023·上海闵行·统考一模）已知数列$\{a_n\}$为无穷等比数列，若$\sum\limits_{i=1}^{+\infty}a_i=-2$，则$\sum\limits_{i=1}^{+\infty}|a_i|$的取值范围为________.

14．（2023·上海奉贤·统考一模）已知数列$\{a_n\}$是各项为正的等比数列，$a_1=1$，$a_5=1$，则其前10项和$S_{10}=$ __________.

15．（2023·上海宝山·统考一模）已知函数$f(x)=(x+1)^3+1$，正项等比数列$\{a_n\}$满足$a_{1012}=\dfrac{1}{10}$，则$\sum\limits_{k=1}^{2023}f(\lg a_k)$

16．（2023·上海崇明·统考一模）已知等比数列$\{a_n\}$首项$a_1=1$，公比$q=2$，则$S_5=$__________.

17．（2023·上海金山·统考一模）已知数列$\{a_n\}$满足$\log_2 a_{n+1}=1+\log_2 a_n$，且$a_1=2$.

(1)求a_{10}的值；

(2)若数列$\{a_n+\dfrac{\lambda}{a_n}\}$为严格增数列，其中$\lambda$是常数，求$\lambda$的取值范围.

18．（2023·上海青浦·统考一模）已知有穷等差数列$\{a_n\}:a_1,a_2,\cdots,a_m(m\geq3,m\in\mathrm{N}^*)$的公差$d$大于零.

(1)证明：$\{a_n\}$不是等比数列；

(2)是否存在指数函数 $y=f(x)$ 满足：$y=f(x)$ 在 $x=a_1$ 处的切线的交 x 轴于 $(a_2,0)$，$y=f(x)$ 在 $x=a_2$ 处的切线的交 x 轴于 $(a_3,0)$，…，$y=f(x)$ 在 $x=a_{m-1}$ 处的切线的交 x 轴于 $(a_m,0)$？若存在，请写出函数 $y=f(x)$ 的表达式，并说明理由；若不存在，也请说明理由；

(3)若数列 $\{a_n\}$ 中所有项按照某种顺序排列后可以构成等比数列 $\{b_n\}$，求出所有可能的 m 的取值.

19．（2023·上海普陀·统考一模）若存在常数 t，使得数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}-a_1a_2a_3\cdots a_n=t$（$n\geq1$，$n\in\mathbf{N}$），则称数列 $\{a_n\}$ 为“$H(t)$ 数列”.

(1)判断数列：1，2，3，8，49 是否为“$H(1)$ 数列”，并说明理由；

(2)若数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2 的“$H(t)$ 数列”，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=a_1a_2a_3\cdots a_n+\log_2 b_n$，求 t 的值和数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(3)若数列 $\{a_n\}$ 是“$H(t)$ 数列”，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1>1$，$t>0$，试比较 $\ln a_n$ 与 a_n-1 的大小，并证明 $t>S_{n+1}-S_n-e^{S_n-n}$.

三、等差、等比系列综合

20．（2023·上海杨浦·统考一模）等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\frac{1}{64}$，公比为 q，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\log_{0.5}a_n$（n 是正整数），若当且仅当 $n=4$ 时，$\{b_n\}$ 的前 n 项和 B_n 取得最大值，则 q 取值范围是（　　）

A．$\left(3,2\sqrt{3}\right)$　　B．$(3,4)$　　C．$\left(2\sqrt{2},4\right)$　　D．$\left(2\sqrt{2},3\sqrt{2}\right)$

21．（2023·上海徐汇·统考一模）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=2$，$S_5=20$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q=\frac{1}{2}$，且满足 $a_4+b_4=9$，求数列 $\{a_n-b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

22．（2023 上·上海虹口·高三统考期末）2022 年 12 月底，某厂的废水池已储存废水 800 吨，以后每月新产生的 2 吨废水也存入废水池．该厂 2023 年开始对废水处理后进行排放，1 月底排放 10 吨处理后的废水，计划以后每月月底排放一次，每月排放处理后的废水比上月增加 2 吨.

(1)若按计划排放，该厂在哪一年的几月份排放后，第一次将废水池中的废水排放完毕？

(2)该厂加强科研攻关，提升废水处理技术，经过深度净化的废水可以再次利用，该厂从 2023 年 7 月开始对该月计划排放的废水进行深度净化，首次净化废水 5 吨，以后每月比上月提高 20%的净化能力．试问：哪一年的几月份开始，当月排放的废水能被全部净化？

23．（2023 上·上海松江·高三统考期末）已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，且

$a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$.

(1)证明：$a_1=b_1$；

(2)若集合 $M=\{k\mid b_k=a_m+a_1, 1\le m\le 50\}$，求集合 M 中的元素个数.

24.（2023·上海杨浦·统考一模）设函数 $f(x)=x+A\sin\frac{\pi x}{2}$，$x\in\mathbf{R}$（其中常数 AÎ R，$A>0$），无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：首项 $a_1>0$，$a_{n+1}=f(a_n)$.

(1)判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

(2)若数列 $\{a_n\}$ 是严格增数列，求证：当 $A<4$ 时，数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列；

(3)当 $A=8$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是否可能为公比小于 0 的等比数列？若可能，求出所有公比的值；若不可能，请说明理由.

四、数列新定义

25.（2023·上海徐汇·统考一模）已知数列 $\{a_n\}$ 为无穷数列．若存在正整数 l，使得对任意的正整数 n，均有 $a_{n+l}\le a_n$，则称数列 $\{a_n\}$ 为"l 阶弱减数列"．有以下两个命题：①数列 $\{b_n\}$ 为无穷数列且 $b_n=\cos n-\frac{n}{2}$（n 为正整数），则数列 $\{b_n\}$ 是"l 阶弱减数列"的充要条件是 $l\ge 4$；②数列 $\{c_n\}$ 为无穷数列且 $c_n=an+\frac{1-q^n}{1-q}$（n 为正整数），若存在 $a\in\mathbf{R}$，使得数列 $\{c_n\}$ 是"2 阶弱减数列"，则 $-1\le q<1$．那么（　　）

A．①是真命题，②是假命题　　B．①是假命题，②是真命题

C．①、②都是真命题　　D．①、②都是假命题

26.（2023 上·上海静安·高三校考阶段练习）设 S_n 是一个无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若一个数列满足对任意的正整数 n，不等式 $\frac{S_n}{n}<\frac{S_{n+1}}{n+1}$ 恒成立，则称数列 $\{a_n\}$ 为和谐数列，给出下列两个命题：

①若对任意的正整数 n 均有 $a_n<a_{n+1}$，则 $\{a_n\}$ 为和谐数列；

②若等差数列 $\{a_n\}$ 是和谐数列，则 S_n 一定存在最小值；

下列说法正确的是（　　）.

A．① 是真命题，② 是假命题　　B．① 是假命题，② 真命题

C．① 和 ② 都是真命题　　D．① 和 ② 都是假命题

27.（2023 上·上海·高三上海中学校考期中）给定一张 $2\times(n+1)$ 的数表（如下表），

0	1	2	3	……	n − 1	n

a_0	a_1	a_2	a_3	……	a_{n-1}	a_n

统计a_0，a_1，$\cdots$，a_n中各数出现次数．若对任意$k=0$，1，$\cdots$，n，均满足数k恰好出现a_k次，则称之为$n+1$阶自指表，举例来说，下表是一张4阶自指表．

0	1	2	3
1	2	1	0

对于如下的一张7阶自指表．记$N=10^6a_0+10^5a_1+10^4a_2+10^3a_3+10^2a_4+10a_5+a_6$，$N$的所有可能值为______．

0	1	2	3	4	5	6
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

28．（2023上·上海杨浦·高三复旦附中校考期中）已知数列$\{x_n\}$，若对于任意正整数n，$x_n+x_{n+2}-x_{n+1}$仍为数列$\{x_n\}$中的项，则称数列$\{x_n\}$为"回归数列"．

(1)已知 $a_n=3^n\left(n\geq 1,n\in \mathrm{N}\right)$，判断数列$\{a_n\}$是否为"回归数列"，并说明理由；

(2)若数列$\{b_n\}$为"回归数列"，且对于任意正整数n，均有$b_n<b_{n+1}$成立，证明：数列$\{b_n\}$为等差数列．

数列（四大类型题）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、等差数列

1．（2023·上海嘉定·统考一模）已知等差数列$\{a_n\}$，公差为d, $f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|$，则下列命题正确的是（　）

A．函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$可能是奇函数

B．若函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$是偶函数，则$d=0$

C．若$d=0$，则函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$是偶函数

D．若$d\neq 0$，则函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$的图象是轴对称图形

【答案】D

【分析】利用$f(0)=0$可判断A；举反例可判断BC；求出$f(a_1-x)=f(a_2+x)$可判断D.

【详解】对于A，若函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$是奇函数，则$f(0)=|0-a_1|+|0-a_2|=0$，

可得$a_1=a_2=0$，所以$a_n=0$，此时$f(x)=2|x|$，$f(-x)=2|x|=f(x)$，

此时函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$是偶函数，故A错误；

对于B，当$a_n=2n-3$时，$a_1=-1,a_2=1$，所以$f(x)=|x+1|+|x-1|$，

$f(-x)=|-x+1|+|-x-1|=|x-1|+|x+1|=f(x)$，函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$是偶函数，

则$d=2\neq 0$，故B错误；

对于C，若$a_n=1$，则$d=0$，则$f(x)=2|x-1|$，所以$f(-x)=2|-x-1|=2|x+1|$，

则$f(-x)\neq f(x)$，所以函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$不是偶函数，故C错误；

对于D，若$d\neq 0$，则$f(a_1-x)=|a_1-x-a_1|+|a_1-x-a_2|=|x|+|d+x|$，

$f(a_2+x)=|a_2+x-a_1|+|a_2+x-a_2|=|x+d|+|x|$，所以$f(a_1-x)=f(a_2+x)$，

所以函数$y=f(x)(x\in\mathbf{R})$的图象关于$x=\dfrac{a_1+a_2}{2}$对称，是轴对称图形，故D正确.

故选：D.

2．（2023·上海闵行·统考一模）已知$f(x)=x^2-8x+10$，$x\in\mathbf{R}$，数列$\{a_n\}$是公差为1的等差数列，若

$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)$的值最小，则$a_1=$________.

【答案】3

【分析】结合等差数列的通项公式，转化为二次函数的最值问题可解.

【详解】∵数列$\{a_n\}$是公差为 1 的等差数列，可设：$a_n=a_1+n-1$.

$\therefore f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)=f(a_1)+f(a_1+1)+f(a_1+2)$

$=(a_1^2-8a_1+10)+\left[(a_1+1)^2-8(a_1+1)+10\right]+\left[(a_1+2)^2-8(a_1+2)+10\right]=3a_1^2-18a_1+11$

∴当$a_1=-\dfrac{-18}{2\times3}=3$时，$f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)$的值最小.

故答案为：3

3.（2023·上海宝山·统考一模）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_4+a_{13}=1$则$S_{16}=$________

【答案】8

【分析】由等差数列的性质结合等差数列的求和公式可得答案.

【详解】由等差数列的性质可得：$a_1+a_{16}=a_4+a_{13}=1$，

所以$S_{16}=\dfrac{(a_1+a_{16})\times16}{2}=\dfrac{1\times16}{2}=8$，

故答案为：8.

4.（2023·上海普陀·统考一模）设S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和$(n\ge1,n\in\mathbf{N})$，若$a_2+a_4=9-a_6$，则$S_7=$______.

【答案】21

【分析】由等差数列性质，得$a_2+a_4+a_6=3a_4=9$，结合等差数列前n项和公式即可得.

【详解】由$\{a_n\}$是等差数列，则$a_2+a_4+a_6=3a_4=9$，即$a_4=3$，

则有$S_7=\dfrac{(a_1+a_7)\times7}{2}=\dfrac{2a_4\times7}{2}=7a_4=21$.

故答案为：21.

5.（2023 上·上海浦东新·高三统考期末）已知S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_n=2n-3$，则满足$S_m=24$的正整数m的值为____________.

【答案】6

【分析】由等差数列的通项公式$a_n=2n-3$，然后利用等差数列的求和公式即可求解.

【详解】由题意得等差数列$a_n=2n-3$，得$a_1=-1$，

所以其前 n 项和为 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(2n-4)}{2}=n(n-2)$，

由 $S_m=24$，即 $m(m-2)=24$，解得 $m=6$，$m=-4$（舍），

所以 m 的值为 6.

故答案为：6.

6．（2023·上海青浦·统考一模）已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=|n-18|$，记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$，若 $S_{n+30}-S_n=225$，则正整数 n 的值为__________.

【答案】2 或3

【分析】对 n 分 $n\le 18$，$n>18$ 讨论求出 S_{n+30}，S_n 代入运算可得解.

【详解】令 $b_n=n-18$，则 $a_n=|b_n|$，

当 $n\le 18$ 时，$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=|b_1|+|b_2|+\ldots|b_n|$

$=-(b_1+b_2+\ldots b_n)=\frac{n(-17+n-18)}{2}=\frac{n(35-n)}{2}$，

$S_{n+30}=a_1+a_2+\ldots+a_{18}+a_{19}+\ldots+a_{n+30}=-(b_1+\ldots+b_{18})+(b_{19}+\ldots+b_{n+30})$

$=(b_1+\ldots+b_{n+30})-2(b_1+\ldots+b_{18})=\frac{(n+30)(n-5)}{2}+306$，

由 $S_{n+30}-S_n=225$，得 $225=\frac{(n+30)(n-5)}{2}+306-\frac{n(35-n)}{2}$，化简整理得，$n^2-5n+6=0$，解得 $n=2$ 或 3；

当 $n>18$ 时，$S_n=a_1+\ldots+a_{18}+\ldots+a_n=|b_1|+\ldots+|b_{18}|+|b_{19}|..+|b_n|$

$=(b_1+\ldots+b_n)-2(b_1+\ldots+b_{18})=\frac{n(n-35)}{2}+306$，

由 $S_{n+30}-S_n=225$，得 $\frac{(n+30)(n-5)}{2}+306-\left(\frac{n(n-35)}{2}+306\right)=225$，化简整理得，$60n=600$ 解得 $n=10$，

这与 $n>18$ 矛盾，不合题意；

综上，符合题意的正整数 $n=2$ 或 3.

故答案为：2 或 3.

7．（2023·上海普陀·统考一模）若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=12$，$a_{n+1}=a_n+2n$（$n\ge 1$，$n\in \mathrm{N}$），则 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值是______.

【答案】6

【分析】利用累加法求得 a_n，计算 $\frac{a_n}{n}$，由对勾函数的性质求最小值，注意 n 是正整数.

【详解】由已知 $a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=4$，…，$a_n-a_{n-1}=2(n-1)$，$n\ge 2$，

所以 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=12+2+4+\cdots+2(n-1)=12+n(n-1)=n^2-n+12$， $n\geq 2$，

又 $a_1=12$ 也满足上式，所以 $a_n=n^2-n+12$，

$\frac{a_n}{n}=\frac{n^2-n+12}{n}=n+\frac{12}{n}-1$

设 $f(x)=x+\frac{12}{x}-1$，由对勾函数性质知 $f(x)$ 在 $(0,2\sqrt{3})$ 上单调递减，在 $(2\sqrt{3},+\infty)$ 递增，

因此 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 在 $n\leq 3$ 时递减，在 $n\geq 4$ 时递增，

又 $\frac{a_3}{3}=3+\frac{12}{3}-1=6$， $\frac{a_4}{4}=4+\frac{12}{4}-1=6$，

所以 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值是 6，

故答案为：6.

8.（2023·上海杨浦·统考一模）等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1+a_2=6$，$a_2+a_3=10$，则 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为________.

【答案】110

【分析】根据等差数列公式得到 $a_1=d=2$，再求和即可.

【详解】等差数列 $\{a_n\}$， $a_1+a_2=2a_1+d=6$， $a_2+a_3=2a_1+3d=10$，解得 $a_1=d=2$，

故 $a_n=2n$，则 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为 $S_{10}=10a_1+\frac{10\times 9}{2}d=20+90=110$.

故答案为：110.

9.（2023·上海嘉定·统考一模）已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n,S_n=n^2+n$，其中 $n\in\mathrm{N},n\geq 1$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求数列 $\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 H_n.

【答案】(1) $a_n=2n$， $n\in\mathrm{N}^*$；

(2) $H_n=\frac{n}{4(n+1)}$

【分析】（1）利用 S_n,a_n 之间的关系进行求解即可；

（2）利用裂项相消法进行求解即可.

【详解】（1）因为当 $n\in\mathrm{N},n\geq 1$ 时，有 $S_n=n^2+n$，

所以当 $n\in\mathrm{N},n\geq 2$ 时，有 $S_{n-1}=(n-1)^2+n-1$，

两式相减，得 $a_n=2n$，

当 $n=1$ 时，由 $S_n=n^2+n\Rightarrow a_1=2$，适合 $a_n=2n$，

所以 $a_n=2n$，$n\in\mathrm{N}^*$；

（2）因为 $a_n=2n$，$n\in\mathrm{N}$；

所以 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

因此 $H_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$.

10．（2023·上海长宁·统考一模）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公差 $d=2$.

(1)若 $S_{10}=100$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)从集合 $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ 中任取 3 个元素，记这 3 个元素能成等差数列为事件 A，求事件 A 发生的概率 $P(A)$.

【答案】(1) $a_n=2n-1$

(2) $\frac{3}{10}$

【分析】（1）根据题意，利用等差数列的求和公式，列出方程，求得 $a_1=1$，进而求得数列的通项公式；

（2）根据题意，得到所有的不同取法有 20 种，再利用列举法求得事件 A 中所包含的基本事件的个数，结合古典概型的概率计算公式，即可求解.

【详解】（1）解：由等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公差 $d=2$，

因为 $S_{10}=100$，可得 $10a_1+\frac{10\times9}{2}\times2=100$，解得 $a_1=1$，

所以 $a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$，即数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$.

（2）解：由题意，从集合 $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ 中任取 3 个元素，共有 20 种不同的取法，

其中这 3 个元素能成等差数列有 $\{(a_1,a_2,a_3),(a_1,a_3,a_5),(a_2,a_3,a_4),(a_2,a_4,a_6),(a_3,a_4,a_5),$

$(a_4,a_5,a_6)\}$，有 6 种不同的取法，

所以事件 A 的概率为 $P(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$.

11．（2023·上海崇明·统考一模）已知 $f(x)=mx+\sin x\ (m\in\mathrm{R},m\neq 0)$．

(1)若函数 $y=f(x)$ 是实数集 R 上的严格增函数，求实数 m 的取值范围；

(2)已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列（公差 $d\neq 0$），$b_n=f(a_n)$．是否存在数列 $\{a_n\}$ 使得数列 $\{b_n\}$ 是等差数列？若存在，请写出一个满足条件的数列 $\{a_n\}$，并证明此时的数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；若不存在，请说明理由；

(3)若 $m=1$，是否存在直线 $y=kx+b$ 满足：①对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\geq kx+b$ 成立，

②存在 $x_0\in\mathbf{R}$ 使得 $f(x_0)=kx_0+b$？若存在，请求出满足条件的直线方程；若不存在，请说明理由．

【答案】(1) $m>1$

(2)存在数列 $\{a_n\}$，数列 $\{a_n\}$ 满足：$\sin a_n+\sin a_{n+2}=2\sin a_{n+1}$，证明见解析

(3)存在直线满足题意，直线方程为 $y=x-1$

【分析】（1）此题分析题意，根据实数集题意可得 $f'(x)=m+\cos x>0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，故可得出答案.

（2）利用等差数列性质，结合题意，首先得出 $b_n+b_{n+2}=2b_{n+1}$ 对一切正整数 n 成立.

再经过化简计算得出结果.

（3）首先分析题意，按 b 三种不同情况进行分析，最后得出直线方程为 $y=x-1$.

【详解】（1）（1）因为函数 $y=f(x)$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的严格增函数，

所以 $f'(x)=m+\cos x>0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都成立

因为函数 $y=m+\cos x$ 的最小值为 $m-1$，所以 $m>1$

（2）$b_n=\sin a_n+ma_n$，若 $\{b_n\}$ 是等差数列，则 $b_n+b_{n+2}=2b_{n+1}$ 对一切正整数 n 成立，

即 $\sin a_n+ma_n+\sin a_{n+2}+ma_{n+2}=2\sin a_{n+1}+2ma_{n+1}$，

将 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$ 代入化简得 $\sin a_n+\sin a_{n+2}=2\sin a_{n+1}$，

即 $\sin\left(a_{n+1}-d\right)+\sin\left(a_{n+1}+d\right)=2\sin a_{n+1}$，

展开化简得 $2\sin a_{n+1}\cdot\left(\cos d-1\right)=0$ 对一切正整数 n 成立，所以 $\cos d=1$，

故 $d=2k\pi\left(k\neq 0,k\in\mathrm{Z}\right)$；

此时 $b_n=\sin a_n+ma_n=\sin\left[a_1+\left(n-1\right)2k\pi\right]+m\left[a_1+\left(n-1\right)2k\pi\right]$

$=m\left(n-1\right)2k\pi+ma_1+\sin a_1$，所以 $b_{n+1}-b_n=m2k\pi$ 为常数，

故 $\{b_n\}$ 是等差数列

（3）令 $g(x)=(x+\sin x)-(kx+b)=(1-k)x+\sin x-b$

则当 $m\in\mathbf{Z}$ 时， $g(\frac{b}{1-k}+2m\pi)=2(1-k)m\pi+\sin\frac{b}{1-k}$

$k>1$ 时，存在 $m\in\mathbf{Z}$ 使得 $g(\frac{b}{1-k}+2m\pi)<0$，

即存在 $x\in\mathbf{R}$ 使得 $f(x)<kx+b$，与题意不符

同理，$k<1$ 时，存在 $x\in\mathbf{R}$ 使得 $f(x)<kx+b$，与题意不符

$k=1$ 时， $g(x)=\sin x-b$

当 $b>-1$ 时，显然存在 $x\in\mathbf{R}$ 使得 $g(x)<0$，即存在 $x\in\mathbf{R}$ 使得 $f(x)<kx+b$

当 $b<-1$ 时，对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $g(x)>0$，

当 $b=1$ 时，存在 $x_0=-\frac{\pi}{2}$，使得 $f(x_0)=kx_0+b$，且对任意的 $x\in R$ 都有 $g(x)\geq 0$，即对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\geq kx+b$

综上，存在直线 $y=kx+b$ 满足题意，直线方程为 $y=x-1$

二、等比数列

12.（2023·上海金山·统考一模）设集合 $A=\{1,2,\cdots,100\}$， X 、Y 均为A的非空子集（允许 $X=Y$）．X 中的最大元素与 Y 中的最小元素分别记为 M、m，则满足 $M>m$ 的有序集合对 (X,Y) 的个数为（　）.

A．$2^{200}-100\cdot 2^{100}$ B．$2^{200}-101\cdot 2^{100}$ C．$2^{201}-100\cdot 2^{100}$ D．$2^{201}-101\cdot 2^{100}$

【答案】B

【分析】根据子集的个数，先求解 $M\leq m$ 的有序集合对 (X,Y) 的个数，然后用总个数减去即可求解.

【详解】对于给定的 $M=\max X$，集合 X 是集合 $\{1,2,\cdots,m-1\}$ 的任意一个子集与 $\{m\}$ 的并，故有 2^{m-1} 种不同的取法，

又 $m=\min Y$，所以 $Y\{m,m+1,\cdots,100\}$ 的任意一个非空子集，共有 $2^{n+1-m}-1$ 种取法，

因此，满足 $M\leq m$ 的有序集合对 (X,Y) 的个数为

$$\sum_{m=1}^{100}2^{m-1}\left(2^{100+1-m}-1\right)=\sum_{m=1}^{100}2^{100}-\sum_{m=1}^{100}2^{m-1}=100\times 2^{100}\frac{1-2^{100}}{1-2}=100\times 2^{100}-2^{100}+,$$

由于有序对 (X,Y) 有 $\left(2^{100}-1\right)\left(2^{100}-1\right)=\left(2^{100}-1\right)^2$ 个，

因此满足 $M>m$ 的有序集合对 (X,Y) 的个数为 $\left(2^{100}-1\right)^2-\left(100\times 2^{100}-2^{100}+1\right)=2^{200}-101\cdot 2^{100}$

故选：B

13.（2023·上海闵行·统考一模）已知数列 $\{a_n\}$ 为无穷等比数列，若 $\sum_{i=1}^{+\infty}a_i=-2$，则 $\sum_{i=1}^{+\infty}|a_i|$ 的取值范围为________.

【答案】$[2,+\infty)$

【分析】利用无穷等比数列的前 n 项和公式及性质即可得解.

【详解】因为 $\{a_n\}$ 为无穷等比数列，$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i=-2$，

所以 $0<|q|<1$，则 $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i=\frac{a_1}{1-q}=-2$，则 $a_1=-2(1-q)$，

因为 $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|q|$，所以 $|a_n|$ 是以 $|q|$ 为公比的等比数列，且 $0<|q|<1$，

此时 $1-q>0$，所以 $\sum_{i=1}^{+\infty}|a_i|=\frac{|a_1|}{1-|q|}=\frac{|-2(1-q)|}{1-|q|}=\frac{2(1-q)}{1-|q|}$，

当 $0<q<1$ 时，$\frac{2(1-q)}{1-|q|}=\frac{2(1-q)}{1-q}=2$；

当 $-1<q<0$ 时，$\frac{2(1-q)}{1-|q|}=\frac{2(1-q)}{1+q}=\frac{4-2(1+q)}{1+q}=\frac{4}{1+q}-2$，

因为 $-1<q<0$，所以 $0<1+q<1$，故 $\frac{4}{1+q}>4$，则 $\frac{4}{1+q}-2>2$；

综上：$\frac{2(1-q)}{1-|q|}\geq 2$，即 $\sum_{i=1}^{+\infty}|a_i|\geq 2$，故 $\sum_{i=1}^{+\infty}|a_i|$ 的取值范围为 $[2,+\infty)$.

故答案为：$[2,+\infty)$.

14．（2023·上海奉贤·统考一模）已知数列 $\{a_n\}$ 是各项为正的等比数列，$a_1=1$，$a_5=1$，则其前 10 项和 $S_{10}=$ __________.

【答案】10

【分析】根据题意，由条件可得数列 $\{a_n\}$ 的公比为 1，则 $S_{10}=10a_1$，即可得到结果.

【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 是各项为正的等比数列，则其公比 $q>0$，

又 $a_1=1$，$a_5=1$，则 $q^4=\frac{a_5}{a_1}=1$，即 $q=1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 为常数数列，且 $a_n=a_1=1$，

所以 $S_{10}=10a_1=10$.

故答案为：10

15．（2023·上海宝山·统考一模）已知函数 $f(x)=(x+1)^3+1$，正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{1012}=\frac{1}{10}$，则 $\sum_{k=1}^{2023} f(\lg a_k)$

【答案】2023

【分析】利用倒序相加法，结合函数的对称性以及等比数列的性质即可求得正确答案.

【详解】函数 $f(x)=(x+1)^3+1$，可看成 $y=x^3$ 向左平移 1 个单位，向上平移 1 个单位得到，

因为 $y=x^3$ 的对称中心为 $(0,0)$，所以 $f(x)=(x+1)^3+1$ 的对称中心为 $(-1,1)$，

所以 $f(x)+f(-2-x)=2$，

因为正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{1012}=\dfrac{1}{10}$，所以 $a_1\cdot a_{2023}=a_2\cdot a_{2022}=\cdots=a_{1012}^2=\dfrac{1}{100}$，

所以 $\lg a_1+\lg a_{2023}=\lg a_2+\lg a_{2022}=\cdots=2\lg a_{1012}=-2$，

所以 $f(\lg a_1)+f(\lg a_{2023})=f(\lg a_2)+f(\lg a_{2022})=\cdots=2$，

$\sum_{k=1}^{2023}f(\lg a_k)=f(\lg a_1)+f(\lg a_2)+f(\lg a_3)+\cdots+f(\lg a_{2023})$ L ①，

$\sum_{k=1}^{2023}f(\lg a_k)=f(\lg a_{2023})+f(\lg a_{2022})+f(\lg a_{2021})+\cdots+f(\lg a_1)$ L ②，

则①②相加得：

$2\sum_{k=1}^{2023}f(\lg a_k)=[f(\lg a_1)+f(\lg a_{2023})]+[f(\lg a_2)+f(\lg a_{2022})]+\cdots+[f(\lg a_{2023})+f(\lg a_1)]$，即

$2\sum_{k=1}^{2023}f(\lg a_k)=2023\times 2$，

所以 $\sum_{k=1}^{2023}f(\lg a_k)=2023$.

故答案为：2023.

16．（2023·上海崇明·统考一模）已知等比数列 $\{a_n\}$ 首项 $a_1=1$，公比 $q=2$，则 $S_5=$__________.

【答案】31

【分析】按照等比数列前 n 项和公式计算即可.

【详解】$S_n=a_1\dfrac{1-q^n}{1-q}=2^n-1$，

故 $S_5=32-1=31$，

故答案为：31.

17．（2023·上海金山·统考一模）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\log_2 a_{n+1}=1+\log_2 a_n$，且 $a_1=2$.

(1)求 a_{10} 的值；

(2)若数列 $\{a_n+\dfrac{\lambda}{a_n}\}$ 为严格增数列，其中 λ 是常数，求 λ 的取值范围.

【答案】(1) $a_{10}=1024$

(2) $\lambda<8$

【分析】（1）根据对数运算性质可得 $a_{n+1}=2a_n$，即可判断 $\{a_n\}$ 为等比数列，即可根据等比数列的通项求解，

（2）利用作差法可得 $\lambda<2^{2n+1}$ 对正整数 n 恒成立，即可求解.

【详解】（1）由 $\log_2 a_{n+1}=1+\log_2 a_n$，得 $\log_2 a_{n+1}=\log_2(2a_n)$，故 $a_{n+1}=2a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$.

又 $a_1=2\neq0$，故数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列.

从而，$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2^n$.所以 $a_{10}=1024$.

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+\frac{\lambda}{a_n}=2^n+\frac{\lambda}{2^n}$，

因为数列 $\{b_n\}$ 为严格增数列，

故 $b_{n+1}-b_n=(2^{n+1}+\frac{\lambda}{2^{n+1}})-(2^n+\frac{\lambda}{2^n})>0$ 对正整数 n 恒成立，

即 $\lambda<2^{2n+1}$ 对正整数 n 恒成立，

当 $n=1$ 时，2^{2n+1} 取到最小值 8.所以 $\lambda<8$.

18.（2023·上海青浦·统考一模）已知有穷等差数列 $\{a_n\}:a_1,a_2,\cdots,a_m(m\geq3,m\in\mathrm{N}^*)$ 的公差 d 大于零.

(1)证明：$\{a_n\}$ 不是等比数列；

(2)是否存在指数函数 $y=f(x)$ 满足：$y=f(x)$ 在 $x=a_1$ 处的切线的交 x 轴于 $(a_2,0)$，$y=f(x)$ 在 $x=a_2$ 处的切线的交 x 轴于 $(a_3,0)$，…，$y=f(x)$ 在 $x=a_{m-1}$ 处的切线的交 x 轴于 $(a_m,0)$？若存在，请写出函数 $y=f(x)$ 的表达式，并说明理由；若不存在，也请说明理由；

(3)若数列 $\{a_n\}$ 中所有项按照某种顺序排列后可以构成等比数列 $\{b_n\}$，求出所有可能的 m 的取值.

【答案】(1)证明见解析

(2)存在指数函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}$ 满足条件，理由见解析

(3)3

【分析】（1）计算 $a_2^2-a_1a_3=d^2>0$，得到证明；

（2）计算切线方程，令 $y=0$ 得 $x=a_i-\frac{f(a_i)}{f'(a_i)}$，即 $\frac{f(x)}{f'(x)}=-d$，$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}$ 满足条件.

（3）举例说明 $m=3$ 时成立，考虑 $m\geq4$ 时，确定 $\{a_n\}$ 不可能所有项均为正数或均为负数，$\{|b_n|\}$ 的前三项即为 $|a_n|$ 中最小的三项，确定 $|a_{k+2}|-|a_k|=2a_{k+1}>0$，考虑 $|a_k|<|a_{k+1}|$，$|a_k|>|a_{k+1}|$ 两种情况，根据等比数列

性质得到 $a_k^2=a_{k+1}a_{k+2}$，整理得到 $a_k=-\frac{2}{3}d$，$a_{k+1}=\frac{1}{3}d$，$a_{k+2}=\frac{4}{3}d$，验证不成立，得到答案.

【详解】(1) $a_2^2-a_1a_3=a_2^2-(a_2-d)(a_2+d)=d^2>0$，故 $\{a_n\}$ 不是等比数列.

(2) $f(x)$ 在 $x=a_i$ 处的切线方程为 $y-f(a_i)=f'(a_i)(x-a_i)$，

令 $y=0$ 得 $x=a_i-\frac{f(a_i)}{f'(a_i)}$，因此，欲使 $f(x)$ 满足条件，只需使 $\frac{f(x)}{f'(x)}=-d$，

令 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}$，则 $f'(x)=-\frac{1}{d}\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}$，满足条件， 故存在指数函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}$ 满足条件.

(3) 取 $\{a_n\}:-2,1,4$，则 $1,-2,4$ 成等比数列，故 $m=3$ 满足条件.

考虑 $m\ge 4$，

首先，$\{a_n\}$ 不可能所有项均为正数或均为负数，

否则，对应的等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为正，等比数列严格增或严格减，

从而 $\{a_n\}$ 即为等比数列，不可能.

其次，因为 $\{b_n\}$ 是等比数列，所以 $\{|b_n|\}$ 也是等比数列，不妨设 $\{|b_n|\}$ 严格增，

则 $\{|b_n|\}$ 的前三项即为 $|a_n|$ 中最小的三项，

则一定对应于 $\{a_n\}$ 中的连续三项 $a_{k,}a_{k+1},a_{k+2}(a_k<0,a_{k+2}>0)$，

不妨设 $a_{k+1}>0$，则 $|a_{k+2}|-|a_k|=a_{k+2}+a_k=2a_{k+1}>0$.

①若 $|a_k|<|a_{k+1}|$，则 $|a_k|<|a_{k+1}|<|a_{k+2}|$，则 a_k,a_{k+1},a_{k+2} 成等比数列，不可能；

②若 $|a_k|>|a_{k+1}|$，则 $|a_{k+1}|<|a_k|<|a_{k+2}|$，则 a_{k+1},a_k,a_{k+2} 成等比数列，

$a_k^2=a_{k+1}a_{k+2}$，即 $a_k^2=(a_k+d)(a_k+2d)$，得 $a_k=-\frac{2}{3}d$，$a_{k+1}=\frac{1}{3}d$，$a_{k+2}=\frac{4}{3}d$，

而除了这三项外，$|a_n|$ 最小值为 $|a_{k-1}|=\frac{5}{3}d$ 或 $|a_{k+3}|=\frac{7}{3}d$，

但 a_{k-1} 和 a_{k+3} 均无法与 a_{k+1},a_k,a_{k+2} 构成等比数列，因此不符合条件.

综上所述：所有可能的 m 的值是 3.

【点睛】关键点睛：本题考查了等差数列和等比数列的综合应用，意在考查学生的计算能力，转化能力和综合应用能力，其中根据特殊例子确定 $m=3$ 满足条件，再考虑 $m\ge 4$ 时不成立，是解题的关键.

19.（2023·上海普陀·统考一模）若存在常数 t，使得数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}-a_1a_2a_3\cdots a_n=t$（$n\ge 1$，$n\in\mathbf{N}$），则称数列 $\{a_n\}$ 为"$H(t)$ 数列".

(1)判断数列：1，2，3，8，49 是否为“$H(1)$数列”，并说明理由；

(2)若数列$\{a_n\}$是首项为2的“$H(t)$数列”，数列$\{b_n\}$是等比数列，且$\{a_n\}$与$\{b_n\}$满足

$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = a_1a_2a_3\cdots a_n + \log_2 b_n$，求$t$的值和数列$\{b_n\}$的通项公式；

(3)若数列$\{a_n\}$是“$H(t)$数列”，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_1>1$，$t>0$，试比较$\ln a_n$与a_n-1的大小，并证明$t>S_{n+1}-S_n-e^{S_n-n}$.

【答案】(1)不是“$H(1)$”数列

(2)$t=-1$，$b_n=2^{n+1}$

(3)$\ln a_n<a_n-1$，证明见解析

【分析】（1）根据“$H(t)$数列”的定义进行判断，说明理由；

（2）根据$\{a_n\}$是首项为 2 的“$H(t)$数列”，求出a_2,a_3，由$\{b_n\}$是等比数列，设公比为q，由

$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = a_1a_2a_3\cdots a_n + \log_2 b_n$，可得$\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 = a_1a_2a_3\cdots a_na_{n+1} + \log_2 b_{n+1}$，作差可得

$a_{n+1}^2 = a_1a_2a_3\cdots a_n(a_{n+1}-1)+\log_2 b_{n+1}-\log_2 b_n$，利用$\{b_n\}$前三项数列，可以求解$t$和$q$，进而求解等比数列$\{b_n\}$的通项公式；

（3）根据题意构造函数$f(x)=\ln x-x+1$，求导并判断$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，由$\{a_n\}$是“$H(t)$数列”与$a_1>1,t>0$，反复利用$a_{n+1}=a_1a_2a_3\cdots a_n+t$，可得对于任意的$n\ge1,n\in\mathbf{N}$，$a_n>1$,进而得到$\ln a_n<a_n-1$，推出$\ln(a_1a_2\cdots a_n)<S_n-n$，再利用$y=\ln x$在$x\in(0,+\infty)$上单调递增，得到$a_1a_2\cdots a_n<e^{S_n-n}$，通过已知条件变形推出$t>S_{n+1}-S_n-e^{S_n-n}$.

【详解】（1）根据“$H(t)$数列”的定义，则$t=1$，故$a_{n+1}-a_1a_2a_3\cdots a_n=1$，

因为$a_2-a_1=1$成立，$a_3-a_2a_1=1$成立，$a_4-a_3a_2a_1=8-1\times2\times3=8-6=2\ne1$不成立，

所以$1,2,3,8,49$不是“$H(1)$数列”.

（2）由$\{a_n\}$是首项为2的“$H(t)$数列”，则$a_2=2+t$，$a_3=3t+4$，

由$\{b_n\}$是等比数列，设公比为q，

由$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = a_1a_2a_3\cdots a_n + \log_2 b_n$，

则$\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 = a_1a_2a_3\cdots a_na_{n+1} + \log_2 b_{n+1}$，

两式作差可得$a_{n+1}^2 = a_1a_2a_3\cdots a_n(a_{n+1}-1) + \log_2 b_{n+1} - \log_2 b_n$，

即$a_{n+1}^2 = a_1a_2a_3\cdots a_n(a_{n+1}-1) + \log_2 q$

由$\{a_n\}$是“$H(t)$数列”，则$a_{n+1} - a_1a_2a_3\cdots a_n = t$，对于$n \geq 1, n \in \mathbf{N}$恒成立，

所以$a_{n+1}^2 = (a_{n+1}-t)(a_{n+1}-1) + \log_2 q$，

即$(t+1)a_{n+1} = t + \log_2 b_{n+1} - \log_2 b_n$对于$n \geq 1, n \in \mathbf{N}$恒成立，

则$\begin{cases}(t+1)a_2 - t = \log_2 q \\ (t+1)a_3 - t = \log_2 q\end{cases}$，即$\begin{cases}(t+1)(2+t) - t = \log_2 q \\ (t+1)(3t+4) - t = \log_2 q\end{cases}$，

解得，$t=-1$，$q=2$，

又由$a_1 = 2$，$a_1^2 = a_1 + \log_2 b_1$，则$b_1 = 4$，即$b_n = 2^{n+1}$

故所求的$t=-1$，数列$\{b_n\}$的通项公式$b_n = 2^{n+1}$

（3）设函数$f(x) = \ln x - x + 1$，则$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$，令$f'(x) = 0$，

解得$x=1$，当$x>1$时，$f'(x)<0$，

则$f(x) = \ln x - x + 1$在区间$(1,+\infty)$单调递减，

且$f(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$，

又由$\{a_n\}$是“$H(t)$数列”，

即　$a_{n+1} - a_1a_2a_3\cdots a_n = t$，对于$n \geq 1, n \in \mathbf{N}$恒成立，

因为$a_1 > 1, t > 0$，则$a_2 = a_1 + t > 1$，

再结合$a_1 > 1, t > 0, a_2 > 1$，

反复利用$a_{n+1} = a_1a_2a_3\cdots a_n + t$，

可得对于任意的$n \geq 1, n \in \mathbf{N}$，$a_n > 1$，

则$f(a_n) < f(1) = 0$，

即$\ln a_n - a_n + 1 < 0$，则$\ln a_n < a_n - 1$，

即$\ln a_1 < a_1 - 1$，$\ln a_2 < a_2 - 1$，$\cdots$，$\ln a_n < a_n - 1$，

相加可得 $\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n<a_1+a_2+\cdots+a_n-n$,

则 $\ln\left(a_1a_2\cdots a_n\right)<S_n-n$，

又因为 $y=\ln x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $a_1a_2\cdots a_n<\mathrm{e}^{S_n-n}$，

又 $a_{n+1}-a_1a_2a_3\cdots a_n=t$，所以 $a_{n+1}-t<\mathrm{e}^{S_n-n}$，

即 $S_{n+1}-S_n-t<\mathrm{e}^{S_n-n}$，

故 $t>S_{n+1}-S_n-\mathrm{e}^{S_n-n}$.

【点睛】关键点睛：本题主要数列的新定义题型，紧扣题意进行求解，同时构造函数，利用导数判断单调是证明不等式的关键.

三、等差、等比系列综合

20．（2023·上海杨浦·统考一模）等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\dfrac{1}{64}$，公比为 q，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\log_{0.5}a_n$（n 是正整数），若当且仅当 $n=4$ 时，$\{b_n\}$ 的前 n 项和 B_n 取得最大值，则 q 取值范围是（　）

A．$(3,2\sqrt{3})$　　B．$(3,4)$　　C．$(2\sqrt{2},4)$　　D．$(2\sqrt{2},3\sqrt{2})$

【答案】C

【分析】求出 $\{b_n\}$ 的通项公式，分析出其为等差数列，然后由条件得出 $\begin{cases}b_4>0\\b_5<0\end{cases}$，代入通项公式即可求解.

【详解】$b_n=\log_{0.5}a_n=\log_{0.5}\left(a_1\cdot q^{n-1}\right)=\log_{0.5}\dfrac{1}{64}+\log_{0.5}q^{n-1}=6+(n-1)\log_{0.5}q=n\log_{0.5}q+6-\log_{0.5}q$

所以 $\{b_n\}$ 是以 $b_1=6$ 为首项，$d=\log_{0.5}q$ 为公差的等差数列，

若当且仅当 $n=4$ 时，$\{b_n\}$ 的前 n 项和 B_n 取得最大值，

所以 $\begin{cases}b_4>0\\b_5<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6+3\log_{0.5}q>0\\6+4\log_{0.5}q<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_{0.5}q>-2\\\log_{0.5}q<-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_{0.5}q>\log_{0.5}0.5^{-2}\\\log_{0.5}q<\log_{0.5}0.5^{-\frac{3}{2}}\end{cases}$

$\Rightarrow 0.5^{-\frac{3}{2}}<q<0.5^{-2}$ 即，$2\sqrt{2}<q<4$，

故选：C.

21．（2023·上海徐汇·统考一模）已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=2$，S_5=20.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若等比数列$\{b_n\}$的公比为$q=\frac{1}{2}$，且满足$a_4+b_4=9$，求数列$\{a_n-b_n\}$的前n项和T_n.

【答案】(1)$a_n=n+1$

(2)$\frac{n(n+3)}{2}+2^{6-n}-64$

【分析】（1）利用等差数列前n项和公式计算S_5，结合$a_1=2$，可求得公差d，继而可求得通项公式；（2）根据等差等比数列的通项公式及前n项和公式进行计算即可.

【详解】（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

又因为$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，且$a_1=2$，

所以$S_5=10+10d=20$，故$d=1$.

所以$a_n=n+1$.

（2）由（1）可知，$a_4=5$，又$a_4+b_4=9$，所以$b_4=4$.

因为$q=\frac{1}{2}$，可得$b_1=\frac{b_4}{q^3}=32$，

所以，$T_n=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_n-b_n)\ =(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=\frac{n(a_1+a_n)}{2}-\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{n(n+3)}{2}+2^{6-n}-64$.

22.（2023上·上海虹口·高三统考期末）2022年12月底，某厂的废水池已储存废水800吨，以后每月新产生的2吨废水也存入废水池．该厂2023年开始对废水处理后进行排放，1月底排放10吨处理后的废水，计划以后每月月底排放一次，每月排放处理后的废水比上月增加2吨.

(1)若按计划排放，该厂在哪一年的几月份排放后，第一次将废水池中的废水排放完毕？

(2)该厂加强科研攻关，提升废水处理技术，经过深度净化的废水可以再次利用，该厂从2023年7月开始对该月计划排放的废水进行深度净化，首次净化废水5吨，以后每月比上月提高20%的净化能力．试问：哪一年的几月份开始，当月排放的废水能被全部净化？

【答案】(1)2025年1月底

(2)2024年8月份.

【分析】（1）利用等差数列的通项公式和求和公式得到不等式，解出即可；

（2）设从2023年1月起第n个月深度净化的废水量为b_n，写出$b_n=\begin{cases}0,1\le n\le 6\\5\times1.2^{n-7},n\ge 7\end{cases}$，再分析其单调性即

可.

【详解】(1）设从 2023 年 1 月起第 n 个月处理后的废水排放量为 a_n 吨，

则由已知条件知:数列 $\{a_n\}$ 是首项为 10，公差为 2 的等差数列，故 $a_n=2n+8$.

令 $\dfrac{n[10+(2n+8)]}{2}\geq 800+2n$，

化简得 $n^2+7n-800\geq 0$，解得 $n\geq 25$，或 $n\leq -32$；

由 n 是正整数，则 $n\geq 25$.

故该厂在 2025 年 1 月底第一次将废水池中的废水排放完毕.

(2）设从 2023 年 1 月起第 n 个月深度净化的废水量为 b_n 吨.

由已知条件，$b_1=b_2=\cdots=b_6=0$，

当 $n\geq 7$ 时，数列 $\{b_n\}$ 是首项为 5，公比为 1.2 的等比数列，

故 $b_n=\begin{cases}0,1\leq n\leq 6\\ 5\times 1.2^{n-7},n\geq 7\end{cases}$，（$n$ 为正整数）.

显然，当 $1\leq n\leq 6$ 时，$a_n>b_n$.

当 $n\geq 7$ 时，由 $a_n\leq b_n$ 得 $2n+8\leq 5\times 1.2^{n-7}$ $(*)$.

设 $c_n=2n+8-5\times 1.2^{n-7}$，则 $c_n-c_{n-1}=2n+8-5\times 1.2^{n-7}-\left[2(n-1)+8-5\times 1.2^{n-8}\right]=2-1.2^{n-8}$，$(n\geq 8)$，

因为 $2-1.2^3=0.272>0$，$2-1.2^4=-0.0736<0$，

所以当 $7\leq n\leq 11$ 时，$c_n-c_{n-1}>0$，即数列 $\{c_n\}$ 是严格增数列，且 $c_n>0$；

当 $n\geq 12$ 时，$c_n-c_{n-1}<0$，即数列 $\{c_n\}$ 是严格减数列.

由于 $c_{19}\approx 1.42>0, c_{20}\approx -5.50<0$.

所以不等式 $(*)$ 的解为 $n\geq 20$ (n 为正整数).

故该厂在 2024 年 8 月开始计划排放的废水能被全部净化.

23.（2023 上·上海松江·高三统考期末）已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列，且 $a_2-b_2=a_3-b_3=b_4-a_4$.

(1)证明：$a_1=b_1$；

(2)若集合 $M=\{k\,|\,b_k=a_m+a_1,1\leq m\leq 50\}$，求集合 M 中的元素个数.

【答案】(1)证明见解析

(2)6

【分析】（1）借助数列的基本量运算即可得到；

（2）将条件转换后计算出 m 与 k 的关系，再根据 m 的范围要求代入计算即可得.

【详解】（1）证明：设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $\begin{cases} a_1+d-2b_1=a_1+2d-4b_1 \\ a_1+d-2b_1=8b_1-(a_1+3d) \end{cases}$，

即 $\begin{cases} d=2b_1 \\ a_1+2d-5b_1=0 \end{cases}$，

解得 $b_1=a_1=\dfrac{d}{2}$，所以原命题得证.

（2）由（1）知 $b_1=a_1=\dfrac{d}{2}$，所以 $b_k=a_m+a_1 \Leftrightarrow a_1\times 2^{k-1}=a_1+(m-1)d+a_1$，

因为 $a_1\neq 0$，所以 $m=2^{k-2}\in[1,50]$，解得 $2\le k\le \log_2 50+2=3+\log_2 25$，

由 $2^4=15$，$2^5=32$，故 $4<\log_2 25<5$，即 $7<3+\log_2 25<8$，

所以满足等式的解 $k=2,3,4,5,6,7$.

故集合 M 中的元素个数为 6.

24.（2023·上海杨浦·统考一模）设函数 $f(x)=x+A\sin\dfrac{\pi x}{2}$，$x\in\mathbf{R}$（其中常数 A Î R，$A>0$），无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：首项 $a_1>0$，$a_{n+1}=f(a_n)$.

(1)判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

(2)若数列 $\{a_n\}$ 是严格增数列，求证：当 $A<4$ 时，数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列；

(3)当 $A=8$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是否可能为公比小于 0 的等比数列？若可能，求出所有公比的值；若不可能，请说明理由.

【答案】(1)奇函数，理由见解析

(2)见解析

(3)存在公比为负数的无穷等比数列 $\{a_n\}$，其公比只能是 -1

【分析】（1）利用奇偶性的定义即可判定；

（2）反证法，假设假设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差为 d，然后结合等差数列的性质推出矛盾；

（3）根据递推关系得到 a_n 与 q 的关系，讨论公比与 -1 的大小关系，然后根据等比数列的性质即可得出答

案.

【详解】(1) 任取 $x \in \mathbf{R}$，都有 $f(-x) = -x + A\sin\left(-\frac{\pi x}{2}\right) = -x - A\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -f(x)$，

因此函数 $y = f(x)$ 是奇函数.

(2) 反证法：假设数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差为 d，

由数列 $\{a_n\}$ 是严格增数列可知 $d > 0$.

因为 $a_{n+1} = a_n + A\sin\frac{\pi a_n}{2}$，所以 $A\sin\frac{\pi a_n}{2} = d$，即 $\sin\frac{\pi a_n}{2} = \frac{d}{A} =$ 非零常数

因为 $\sin\frac{\pi a_1}{2} = \sin\frac{\pi(a_1 + d)}{2} = \sin\frac{\pi(a_1 + 2d)}{2} = \cdots \neq 0$，

所以 $d = 4k$（其中 k 是正整数）.

因为 $d \geq 4$，$0 < A < 4$，所以 $\frac{d}{A} > 1$. 方程 $\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{d}{A}$ 无解，矛盾.

假设不成立，即当 $A < 4$ 时，数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列.

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，则其各项均非零，设其公比为 q

由 $a_{n+1} = a_n + 8\sin\frac{\pi a_n}{2}$ 得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{8}{a_n}\sin\frac{\pi a_n}{2}$，即 $\sin\frac{\pi a_n}{2} = \frac{a_n}{8}(q-1)$.

考虑方程 $\sin\frac{\pi x}{2} = \frac{q-1}{8}x$，$a_n$ 均为该方程（记为①）的解.

由函数 $y = \sin\frac{\pi x}{2}$ 的值域为 $[-1, 1]$ 可知 $\left|\frac{q-1}{8}x\right| \leq 1$，即 $|x| \leq \frac{8}{|q-1|}$，

所以 $|a_n| \leq \frac{8}{|q-1|}$. 若 $q < -1$，则当 n 充分大时（$n > \log_{|q|}\frac{8}{a_1|q-1|} + 1$ 时），

$|a_n| > \frac{8}{|q-1|}$，这与 $|a_n| \leq \frac{8}{|q-1|}$ 矛盾，从而不合题意.

若 $-1 < q < 0$，函数 $y = \sin\frac{\pi x}{2} - \frac{q-1}{8}x$ 在 $[-1, 1]$ 是严格增函数

由 $x = 0$ 时 $y = 0$，可知函数当 $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ 时，均有 $y \neq 0$，

因此函数的零点（即方程①的解）的绝对值均大于 1，即 $|a_n| > 1$.

但若 $-1 < q < 0$，由 $|a_n| = a_1|q|^{n-1}$，则当 n 充分大时（$n > 1 + \log_{|q|}\frac{1}{a_1}$ 时），

将有 $|a_n| < 1$，这与 $|a_n| > 1$ 矛盾，从而不合题意.

综上，只能有 $q = -1$. 此时方程①为 $\sin\frac{\pi x}{2} = -\frac{1}{4}x$，

记 $g(x) = \sin\frac{\pi x}{2} + \frac{x}{4}, x \in \mathbf{R}$. 因为 $g(2) = \frac{1}{2} > 0$，$g(3) = -\frac{1}{4} < 0$

所以存在 $x_0 \in (2, 3)$，使 x_0 是方程①的解.

进而由函数 $y=g(x)$ 是奇函数，$-x_0$ 也是方程①的解．因此只需取

$a_n=\begin{cases}x_0, & n=2k-1,\\ -x_0, & n=2k,\end{cases}$ 其中 k 是正整数即可.

综合上述，存在公比为负数的无穷等比数列 $\{a_n\}$，其公比只能是 -1．

四、数列新定义

25．（2023·上海徐汇·统考一模）已知数列 $\{a_n\}$ 为无穷数列．若存在正整数 l，使得对任意的正整数 n，均有 $a_{n+l}\le a_n$，则称数列 $\{a_n\}$ 为"l 阶弱减数列"．有以下两个命题：①数列 $\{b_n\}$ 为无穷数列且 $b_n=\cos n-\frac{n}{2}$（n 为正整数），则数列 $\{b_n\}$ 是"l 阶弱减数列"的充要条件是 $l\ge 4$；②数列 $\{c_n\}$ 为无穷数列且 $c_n=an+\frac{1-q^n}{1-q}$（n 为正整数），若存在 $a\in\mathbf{R}$，使得数列 $\{c_n\}$ 是"2 阶弱减数列"，则 $-1\le q<1$．那么（　）

A．①是真命题，②是假命题　　　　B．①是假命题，②是真命题

C．①、②都是真命题　　　　　　　D．①、②都是假命题

【答案】C

【分析】对于①：根据"l 阶弱减数列"的定义结合充分必要条件分析判断；对于②：分析可得 $2a+q^n+q^{n+1}<0$ 对一切正整数 n 恒成立，分 $|q|>1$、$q=-1$ 和 $|q|<1$ 三种情况，分析求解.

【详解】对于①：因为 $b_n=\cos n-\frac{n}{2}$，

若该数列 $\{b_n\}$ 为"l 弱减数列"，

因为 $\frac{5\pi}{6}<3<\pi,\frac{11\pi}{6}<6<2\pi$，则 $-1<\cos 3<-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos 6<1$，

可得 $b_3-b_6=\left(\cos 3-\frac{3}{2}\right)-\left(\cos 6-\frac{6}{2}\right)=\cos 3-\cos 6+\frac{3}{2}<-\sqrt{3}+\frac{3}{2}<0$，即 $b_3<b_6$，

同理可得 $b_4<b_6,b_5<b_6$，所以 $l\ge 4$；

当 $l\ge 4$ 时，$b_{n+l}-b_n=\left[\cos(n+l)-\frac{n+l}{2}\right]-\left(\cos n-\frac{n}{2}\right)=\cos(n+l)-\cos n-\frac{l}{2}\le 2-\frac{l}{2}\le 0$，

所以该数列为"l 弱减数列"；

综上所述：数列 $\{b_n\}$ 是"l 阶弱减数列"的充要条件是 $l\ge 4$，故①是真命题；

对于②：因为 $c_n=an+\frac{1-q^n}{1-q}$，显然 $q\ne 1$，

若存在 $a\in\mathbf{R}$ 使得数列 $\{c_n\}$ 为"2 阶弱减数列"，

则 $c_{n+2} \le c_n$，即 $a(n+2)+\frac{1-q^{n+2}}{1-q} \le an+\frac{1-q^n}{1-q}$，整理得 $2a+q^n+q^{n+1}<0$，

所以 $2a+q^n+q^{n+1}<0$ 对一切正整数 n 恒成立，

若 $|q|>1$，当 $a=0$ 时，当 $q>1$，则 $q^n+q^{n+1}>0$；

当 $q<-1, n$ 为奇数，$q^n+q^{n+1}=q^n(1+q)>0$；

可知 $a=0$ 不合题意，所以 $a\ne 0$，

则 $q^2>1, 1+q^{-1}=\frac{q+1}{q}>0$，

当 $n=2m-1, m>\log_{q^2}\frac{2|a|}{1+q^{-1}}$ 时，

则 $q^{n+1}=q^{2m}=\left(q^2\right)^m>\left(q^2\right)^{\log_{q^2}\frac{2|a|}{1+q^{-1}}}=\frac{2|a|}{1+q^{-1}}$，

可得 $2a+q^n+q^{n+1}=2a+q^{n+1}\left(1+q^{-1}\right)>2a+2|a|\ge 0$，不合题意；

若 $q=-1$，取 $a<0$，则 $2a+q^n+q^{n+1}=2a+q^n(1+q)=2a<0$，符合题意；

若 $|q|<1$，则 $-1<q^n, q^{n+1}<1$，则 $-2<q^n+q^{n+1}<2$，

取 $a\le -1$，则 $2a+q^n+q^{n+1}<2a+2\le 0$，符合题意；

综上所述：存在 $a\in\mathbf{R}$，使得数列 $\{c_n\}$ 是“2 阶弱减数列”，则 $-1\le q<1$．故②是真命题.

故选：C.

【点睛】方法点睛：对于新定义问题时，可以通过举例或转化法理解新定义，进而根据新定义分析求解.

26.（2023 上·上海静安·高三校考阶段练习）设 S_n 是一个无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若一个数列满足对任意的正整数 n，不等式 $\frac{S_n}{n}<\frac{S_{n+1}}{n+1}$ 恒成立，则称数列 $\{a_n\}$ 为和谐数列，给出下列两个命题：

①若对任意的正整数 n 均有 $a_n<a_{n+1}$，则 $\{a_n\}$ 为和谐数列；

②若等差数列 $\{a_n\}$ 是和谐数列，则 S_n 一定存在最小值；

下列说法正确的是（　　）.

A．① 是真命题，② 是假命题　　　　B．① 是假命题，② 真命题

C．① 和 ② 都是真命题　　　　D．① 和 ② 都是假命题

【答案】C

【分析】先得出 $\frac{S_n}{n}<\frac{S_{n+1}}{n+1}$ 的等价条件 $S_n<na_{n+1}$，然后再进行判断.

【详解】对于①：$\frac{S_n}{n}<\frac{S_{n+1}}{n+1}\Leftrightarrow(n+1)S_n<nS_{n+1}\Leftrightarrow S_n<n\left(S_{n+1}-S_n\right)\Leftrightarrow S_n<na_{n+1}$，

若 $a_n<a_{n+1}$，则 $S_n<na_n<na_{n+1}$，所以①正确；

对于②：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，所以 $\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2}$，

即 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列，

若 $\{a_n\}$ 为和谐数列，即 $\frac{S_n}{n}<\frac{S_{n+1}}{n+1}$，则 $\frac{d}{2}>0$，

所以关于 n 的二次函数 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，开口向上，

所以在 $n\in\mathbf{N}^*$ 上一定存在最小值，所以②正确；

故选：C

27．（2023 上·上海·高三上海中学校考期中）给定一张 $2\times(n+1)$ 的数表（如下表），

0	1	2	3	……	n−1	n
a_0	a_1	a_2	a_3	……	a_{n-1}	a_n

统计 a_0，a_1，…，a_n 中各数出现次数．若对任意 $k=0$，1，…，n，均满足数 k 恰好出现 a_k 次，则称之为 $n+1$ 阶自指表，举例来说，下表是一张 4 阶自指表．

0	1	2	3
1	2	1	0

对于如下的一张 7 阶自指表．记 $N=10^6a_0+10^5a_1+10^4a_2+10^3a_3+10^2a_4+10a_5+a_6$，$N$ 的所有可能值为______．

0	1	2	3	4	5	6
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

【答案】3211000

【分析】由题意，写出 7 阶自指表，求出 a_k，$k=0,1,2,3,4,5,6$，代入即可求出 N．

【详解】由题意可得，7 阶自指表为:

0	1	2	3	4	5	6

3	2	1	1	0	0	0

此时 $a_0=3$，$a_1=2$，$a_2=1$，$a_3=1$，$a_4=a_5=a_6=0$，

所以 $N=10^6a_0+10^5a_1+10^4a_2+10^3a_3+10^2a_4+10a_5+a_6=3211000$.

故答案为：3211000.

28.（2023 上·上海杨浦·高三复旦附中校考期中）已知数列 $\{x_n\}$，若对于任意正整数 n，$x_n+x_{n+2}-x_{n+1}$ 仍为数列 $\{x_n\}$ 中的项，则称数列 $\{x_n\}$ 为“回归数列”.

(1)已知 $a_n=3^n\left(n\geq 1,n\in \mathrm{N}\right)$，判断数列 $\{a_n\}$ 是否为“回归数列”，并说明理由；

(2)若数列 $\{b_n\}$ 为“回归数列”，且对于任意正整数 n，均有 $b_n<b_{n+1}$ 成立，证明：数列 $\{b_n\}$ 为等差数列.

【答案】(1)数列 $\{a_n\}$ 不为“回归数列”，详见解析

(2)详见解析

【分析】(1) 由“回归数列”的概念，结合 $a_n+a_{n+2}-a_{n+1}$ 的结果可判断；

(2)设 $b_n+b_{n+2}-b_{n+1}=b_m$，结合 $b_n-b_{n+1}<0$ 以及等差数列的概念可解.

【详解】(1）对于任意 $n\in \mathrm{N}^*$，$x_n+x_{n+2}-x_{n+1}$ 仍为数列 x_n 中的项，则称数列 $\{x_n\}$ 为“回归数列”.

已知 $a_n=3^n\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，则 $a_n+a_{n+2}-a_{n+1}=3^n+3^{n+2}-3^{n+1}=7\cdot 3^n$，

显然 $7\cdot 3^n$ 不是数列 $\{a_n\}$ 中的项，故：数列 $\{a_n\}$ 不为“回归数列”.

（2）由题意知:$\forall n\in \mathbf{N}$，必存在 $m\in \mathrm{N}^*$，使得：$b_n+b_{n+2}-b_{n+1}=b_m$ 由题意可知：$b_n-b_{n+1}<0$，

$b_{n+2}-b_{n+1}>0$，故 $b_n<b_m<b_{n+2}$ 因此 $m=n+1$，即：$b_n+b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}$

整理得：$b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n$，则数列 $\{b_n\}$ 为等差数列.