解析几何（三大类型题综合）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

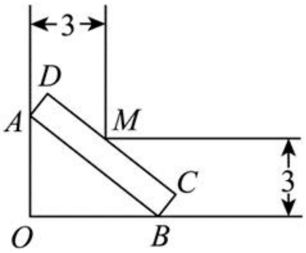
一、直线与方程

1．（2023·上海嘉定·统考一模）直线倾斜角的取值范围为（　　）

A．$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$　　B．$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$　　C．$[0,\pi)$　　D．$[0,\pi]$

2．（2023·上海青浦·统考一模）已知向量$\vec{d}=(1,-1)$垂直于直线l的法向量，过$A(1,1)$、$B(-1,8)$分别作直线l的垂线，对应垂足为A_1和B_1，若$\overrightarrow{A_1B_1}=\lambda\vec{d}$，则实数$\lambda$的值为______.

3．（2023·上海徐汇·统考一模）某建筑物内一个水平直角型过道如图所示，两过道的宽度均为3米，有一个水平截面为矩形的设备需要水平通过直角型过道．若该设备水平截面矩形的宽BC为1米，则该设备能水平通过直角型过道的长AB不超过___米．



4．（2023·上海徐汇·统考一模）已知直线$l: y=kx+2$经过点$(1,1)$，则直线l倾斜角的大小为___.

5．（2023上·上海浦东新·高三统考期末）已知直线l的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$，请写出直线l的一个法向量______.

二、圆与方程

6．（2023·上海崇明·统考一模）已知正实数a,b,c,d满足$a^2-ab+1=0$，$c^2+d^2=1$，则当$(a-c)^2+(b-d)^2$取得最小值时，$ab=$__________.

7．（2023·上海宝山·统考一模）以坐标原点为对称中心，焦点在x轴上的椭圆Γ过点$A(-2,0)$，且离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆Γ的方程；

(2)若点$B(1,0)$，动点M满足$|MA|=2|MB|$，求动点M的轨迹所围成的图形的面积；

(3)过圆$x^2+y^2=4$上一点P（不在坐标轴上）作椭圆Γ的两条切线l_1、l_2.记OP、l_1、l_2的斜率分别为k_0、k_1、k_2，求证：$k_0(k_1+k_2)=-2$.

8．（2023上·上海·高三上海市进才中学校考期中）双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{3}$，圆

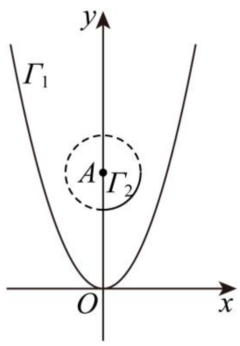
$O:x^2+y^2=2$ 与 x 轴正半轴交于点A，点 $T\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 在双曲线 C 上.

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)过点 T 作圆 O 的切线交双曲线 C 于两点 M 、 N ，试求 MN 的长度；

(3)设圆 O 上任意一点 P 处的切线交双曲线 C 于两点 M 、 N ，试判断 $|PM|\cdot|PN|$ 是否为定值?若为定值，求出该定值；若不是定值，请说明理由.

9.（2023上·上海黄浦·高三统考期中）设 a 为实数，Γ_1 是以点 $O(0,0)$ 为顶点，以点 $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$ 为焦点的抛物线，Γ_2 是以点 $A(0,a)$ 为圆心、半径为1的圆位于 y 轴右侧且在直线 $y=a$ 下方的部分.



(1)求 Γ_1 与 Γ_2 的方程；

(2)若直线 $y=x+2$ 被 Γ_1 所截得的线段的中点在 Γ_2 上，求 a 的值；

(3)是否存在 a，满足：Γ_2 在 Γ_1 的上方，且 Γ_2 有两条不同的切线被 Γ_1 所截得的线段长相等？若存在，求出 a 的取值范围；若不存在，请说明理由.

三、圆锥曲线

10.（2023·上海青浦·统考一模）定义：如果曲线段 C 可以一笔画出，那么称曲线段 C 为单轨道曲线，比如圆、椭圆都是单轨道曲线；如果曲线段 C 由两条单轨道曲线构成，那么称曲线段 C 为双轨道曲线. 对于曲线 $\Gamma:\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=m(m>0)$ 有如下命题：p:存在常数 m，使得曲线 Γ 为单轨道曲线； q:存在常数 m，使得曲线 Γ 为双轨道曲线. 下列判断正确的是（　）.

A. p 和 q 均为真命题　　B. p 和 q 均为假命题

C. p 为真命题，q 为假命题　　D. p 为假命题，q 为真命题

11.（2023上·上海虹口·高三统考期末）已知曲线 Γ 的对称中心为 O，若对于 Γ 上的任意一点 A，都存在 Γ 上两点 B，C，使得 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，则称曲线 Γ 为“自稳定曲线”. 现有如下两个命题：

①任意椭圆都是“自稳定曲线”；②存在双曲线是“自稳定曲线”.

则（　）

A. ①是假命题，②是真命题　　B. ①是真命题，②是假命题

C．①②都是假命题　　D．①②都是真命题

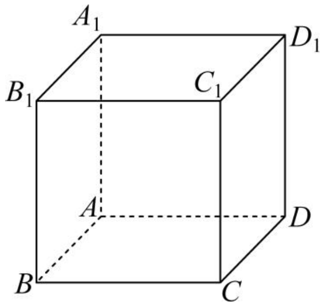
12．（2023上·上海松江·高三统考期末）双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的右焦点坐标是________．

13．（2023·上海杨浦·统考一模）若椭圆$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1\left(a>1\right)$长轴长为4，则其离心率为________．

14．（2023·上海杨浦·统考一模）已知抛物线$y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点为F，第一象限的A、B两点在抛物线上，且满足$|BF|-|AF|=4$，$|AB|=4\sqrt{2}$.若线段AB中点的纵坐标为4，则抛物线的方程为________．

15．（2023·上海普陀·统考一模）若抛物线$x^2=my$的顶点到它的准线距离为$\frac{1}{2}$，则正实数$m=$______．

16．（2023·上海闵行·统考一模）已知点P在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的表面上，P到三个平面$ABCD$、ADD_1A_1、ABB_1A_1中的两个平面的距离相等，且P到剩下一个平面的距离与P到此正方体的中心的距离相等，则满足条件的点P的个数为________．



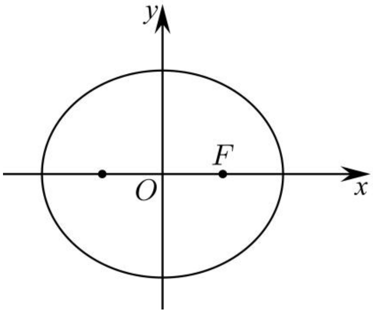
17．（2023·上海奉贤·统考一模）已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为$2\sqrt{3}$，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆的左右焦点分别为$F_1$、$F_2$，直角坐标原点记为$O$．设点$P\left(0,t\right)$，过点$P$作倾斜角为锐角的直线$l$与椭圆交于不同的两点$B$、$C$．

(1)求椭圆的方程；

(2)设椭圆上有一动点T，求$\overrightarrow{PT}\cdot\left(\overrightarrow{TF_1}-\overrightarrow{TF_2}\right)$的取值范围；

(3)设线段BC的中点为M，当$t\geq\sqrt{2}$时，判别椭圆上是否存在点Q，使得非零向量$\overrightarrow{OM}$与向量$\overrightarrow{PQ}$平行，请说明理由．

18．（2023·上海青浦·统考一模）已知椭圆Γ的离心率是$\frac{1}{2}$，长轴长4，椭圆的中心是坐标原点，焦点在x轴上．



(1)求椭圆Γ的标准方程；

(2)已知A，B，C是椭圆Γ上三个不同的点，F是椭圆Γ的右焦点，若原点O是$\triangle ABC$的重心，求$|FA|+|FB|+|FC|$的值；

(3)已知$T(1,1)$，椭圆Γ四个动点M，N，P，Q满足$\overrightarrow{MT}=3\overrightarrow{TQ}$，$\overrightarrow{NT}=3\overrightarrow{TP}$，求直线$MN$的方程.

解析几何（三大类型题综合）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、直线与方程

1．（2023·上海嘉定·统考一模）直线倾斜角的取值范围为（　　）

A．$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$　　B．$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$　　C．$[0,\pi)$　　D．$[0,\pi]$

【答案】C

【分析】根据直线倾斜角的定义进行判断即可.

【详解】当直线与横轴平行时，直线的倾斜角是0，

因此直线倾斜角的取值范围为$[0,\pi)$，

故选：C

2．（2023·上海青浦·统考一模）已知向量$\vec{d}=(1,-1)$垂直于直线l的法向量，过$A(1,1)$、$B(-1,8)$分别作直线l的垂线，对应垂足为A_1和B_1，若$\overrightarrow{A_1B_1}=\lambda\vec{d}$，则实数$\lambda$的值为______.

【答案】$-\frac{9}{2}$

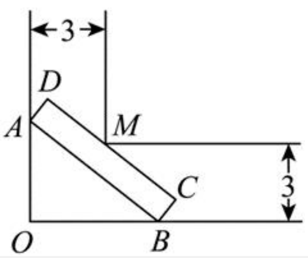
【分析】$\overrightarrow{A_1B_1}$为$\overrightarrow{AB}$在$\vec{d}=(1,-1)$上的投影向量，得到$\lambda=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|^2}$，计算得到答案.

【详解】$\overrightarrow{A_1B_1}$为$\overrightarrow{AB}$在$\vec{d}=(1,-1)$上的投影向量，故$\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|^2}\cdot\vec{d}=\lambda\vec{d}$，$\overrightarrow{AB}=(-2,7)$，

故$\lambda=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{d}}{\left|\vec{d}\right|^2}=\frac{-2-7}{2}=-\frac{9}{2}$.

故答案为：$-\frac{9}{2}$.

3．（2023·上海徐汇·统考一模）某建筑物内一个水平直角型过道如图所示，两过道的宽度均为3米，有一个水平截面为矩形的设备需要水平通过直角型过道．若该设备水平截面矩形的宽BC为1米，则该设备能水平通过直角型过道的长AB不超过___米.



【答案】$6\sqrt{2}-2$

【分析】建立平面直角坐标系，利用直线 AB 的方程求得设备的长 AB 的表达式，再利用均值定理求得 AB 的最小值，进而得到该设备能水平通过直角型过道时 AB 不超过的值.

【详解】分别以 OB,OA 所在直线为 x,y 轴建立平面直角坐标系如图，

则 $M(3,3)$，令 $A(0,b),B(a,0),(a>0,b>0)$，

则直线 AB 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，

则 M 在直线 AB 的上方，且 M 到直线 AB 的距离为 1，

即 $\begin{cases}\frac{3}{a}+\frac{3}{b}>1\\ \frac{\left|\frac{3}{a}+\frac{3}{b}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}}=1\end{cases}$，　则 $\frac{3}{a}+\frac{3}{b}-1=\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}$，

整理得 $\sqrt{a^2+b^2}=3(a+b)-ab$，

设 $|AB|=r,\angle OAB=\theta,\left(r>0,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$，则 $a=r\sin\theta,b=r\cos\theta$，

则 $\sqrt{a^2+b^2}=3(a+b)-ab$ 可化为 $r=3r(\sin\theta+\cos\theta)-r^2\sin\theta\cos\theta$，

令 $t=\sin\theta+\cos\theta\left(\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$，则 $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in\left[1,\sqrt{2}\right]$，则

$$r=\frac{3(\sin\theta+\cos\theta)-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{3t-1}{\frac{t^2-1}{2}}=2\times\frac{1}{\frac{\frac{1}{9}(3t-1)^2+\frac{2}{9}(3t-1)-\frac{8}{9}}{3t-1}}$$

$$=\frac{18}{(3t-1)-\frac{8}{3t-1}+2},$$

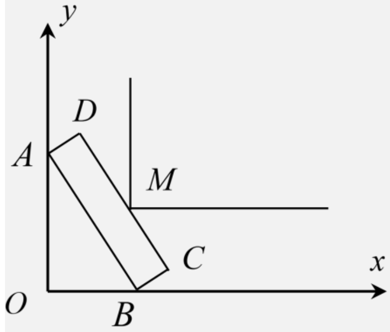
由 $t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$，得 $3t-1\in\left[2,3\sqrt{2}-1\right]$，

又 $y=x-\frac{8}{x}+2$ 在 $\left[2,3\sqrt{2}-1\right]$ 上单调递增，

则 $(3t-1)-\frac{8}{3t-1}+2\le 3\sqrt{2}-1-\frac{8}{3\sqrt{2}-1}+2=\frac{9}{3\sqrt{2}-1}$，

则 $\frac{18}{(3t-1)-\frac{8}{3t-1}+2}\ge 2\left(3\sqrt{2}-1\right)$（当且仅当 $t=\sqrt{2}$ 时等号成立）

则该设备能水平通过直角型过道的长 AB 不超过 $2\left(3\sqrt{2}-1\right)$ 米



故答案为：$2\left(3\sqrt{2}-1\right)$

4．（2023·上海徐汇·统考一模）已知直线$l: y=kx+2$经过点$(1,1)$，则直线l倾斜角的大小为___.

【答案】$\frac{3\pi}{4}$

【分析】先求得直线l的斜率，进而求得直线l倾斜角的大小.

【详解】由直线$l: y=kx+2$经过点$(1,1)$，可得$1=k+2$，解之得$k=-1$，

设直线l倾斜角为θ，则$\tan\theta=-1$，

又$\theta\in[0,\pi)$，则$\theta=\frac{3\pi}{4}$

则直线l倾斜角的大小为$\frac{3\pi}{4}$

故答案为：$\frac{3\pi}{4}$

5．（2023上·上海浦东新·高三统考期末）已知直线l的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$，请写出直线l的一个法向量______.

【答案】$\left(\sqrt{3},-1\right)$（答案不唯一）

【分析】先求出直线的斜率，再根据垂直关系写出法向量即可.

【详解】因为直线l的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$，所以直线l的倾斜角为$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，

所以直线l的一个方向向量为$\left(1,\sqrt{3}\right)$，

所以直线l的一个法向量为$\left(\sqrt{3},-1\right)$，（答案不唯一，只要满足与向量$\left(1,\sqrt{3}\right)$垂直即可）.

故答案为：$\left(\sqrt{3},-1\right)$（答案不唯一）

二、圆与方程

6．（2023·上海崇明·统考一模）已知正实数a,b,c,d满足$a^2-ab+1=0$，$c^2+d^2=1$，则当$(a-c)^2+(b-d)^2$取得最小值时，$ab=$__________.

【答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}+1$

【分析】将$(a-c)^2+(b-d)^2$转化为(a,b)与(c,d)两点间距离的平方，进而转化为(a,b)与圆心$(0,0)$的距离，结合基本不等式求得最小值，进而分析求解即可.

【详解】可将$(a-c)^2+(b-d)^2$转化为(a,b)与(c,d)两点间距离的平方，

由$a^2-ab+1=0$，得$b=a+\dfrac{1}{a}$，

而$c^2+d^2=1$表示以$(0,0)$为圆心，1为半径的圆，(c,d)为圆上一点，

则(a,b)与圆心$(0,0)$的距离为：$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2}=\sqrt{2a^2+\dfrac{1}{a^2}+2}\geq\sqrt{2\sqrt{2a^2\cdot\dfrac{1}{a^2}}+2}=\sqrt{2\sqrt{2}+2}$，

当且仅当$2a^2=\dfrac{1}{a^2}$，即$a=\pm\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$时等号成立，

此时(a,b)与圆心$(0,0)$的距离最小，即(a,b)与(c,d)两点间距离的平方最小，

即$(a-c)^2+(b-d)^2$取得最小值.

当$a=\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$时，$ab=a^2+1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$，

故答案为：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$.

【点睛】关键点点睛：本题的解题关键是能够将问题转化为圆$c^2+d^2=1$上的点到$b=a+\dfrac{1}{a}$上的点的距离的最小值的求解问题，进而求解.

7.（2023·上海宝山·统考一模）以坐标原点为对称中心，焦点在x轴上的椭圆Γ过点$A(-2,0)$，且离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆Γ的方程；

(2)若点$B(1,0)$，动点M满足$|MA|=2|MB|$，求动点M的轨迹所围成的图形的面积；

(3)过圆$x^2+y^2=4$上一点P（不在坐标轴上）作椭圆Γ的两条切线l_1、l_2.记OP、l_1、l_2的斜率分别为k_0、k_1、k_2，求证：$k_0(k_1+k_2)=-2$.

【答案】(1)$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

(2)面积为4π.

(3)证明见解析

【分析】（1）由已知条件列方程组，结合$a^2=b^2+c^2$，解出a和b，即可得椭圆的方程；

（2）设 $M(x,y)$，　由 $|MA|=2|MB|$ 可得轨迹方程，再求面积即可；

（3）过点 P 的直线 $y=kx+m$ 与椭圆相切，与椭圆方程联立，利用得出的一元二次方程，结合韦达定理化简，进而可求出 $k_0(k_1+k_2)$ 为定值 -2.

【详解】（1）由题设知椭圆 Γ 中，$a=2,e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 得 $c=\sqrt{3}$

由 $a^2=b^2+c^2$ 得 $b=1$

所以椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）设 $M(x,y)$，　由 $|MA|=2|MB|$ 得 $(x+2)^2+y^2=4\left[(x-1)^2+y^2\right]$

化简得 $(x-2)^2+y^2=4$.

表示的是以 $(2,0)$ 为圆心，2 为半径的圆，其面积为 4π.

（3）设 $P(x_0,y_0),(x_0,y_0\neq 0)$，且 ${x_0}^2+{y_0}^2=4$

设过点 P 的直线 $y=kx+m$ 与椭圆相切，联立

$\begin{cases}y=kx+m\\x^2+4y^2=4\end{cases}$ 化简得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$

由 $\Delta=64k^2m^2-16(m^2-1)(4k^2+1)=0$ 得 $m^2=4k^2+1$

点 $P(x_0,y_0)$ 在直线 $y=kx+m$ 上，得 $m=y_0-kx_0$ 代入上式

$(y_0-kx_0)^2=4k^2+1$

化简得 $(4-{x_0}^2)k^2+2x_0y_0k+1-{y_0}^2=0$

因为 l_1、l_2 是椭圆的两条切线，所以 k_1、k_2 是上面方程的两根

由韦达定理得 $k_1+k_2=\frac{2x_0y_0}{{x_0}^2-4}$.

由 ${x_0}^2+{y_0}^2=4$ 得 ${x_0}^2-4=-{y_0}^2$

所以 $k_1+k_2=\frac{2x_0y_0}{-{y_0}^2}=\frac{2x_0}{-y_0}$

又 $k_0=\frac{y_0}{x_0}$

所以 $k_0(k_1+k_2)=\frac{2x_0}{-y_0}\cdot\frac{y_0}{x_0}=-2$.

8．（2023 上·上海·高三上海市进才中学校考期中）双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$，圆

$O: x^2+y^2=2$ 与 x 轴正半轴交于点A，点 $T\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 在双曲线 C 上.

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)过点 T 作圆 O 的切线交双曲线 C 于两点 M 、 N ，试求 MN 的长度；

(3)设圆 O 上任意一点 P 处的切线交双曲线 C 于两点 M 、 N ，试判断 $|PM|\cdot|PN|$ 是否为定值?若为定值，求出该定值；若不是定值，请说明理由.

【答案】(1) $x^2-\frac{y^2}{2}=1$

(2) $|MN|=4$

(3) $|PM|\cdot|PN|$ 为定值，且 $|PM|\cdot|PN|=2$

【分析】（1）由离心率为 $\sqrt{3}$ ，可得 $b=\sqrt{2}a$ ，再由点 $T\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 在双曲线 C 上可得出 a 的值，由此可得出双曲线 C 的方程；

（2）求出两条切线的方程，进而求出两切线与双曲线 C 的交点坐标，结合两点间的距离公式可求得 $|MN|$；

（3）线斜率存在时，设出其方程并与双曲线方程联立，利用韦达定理、三角形相似可得 $|PM|\cdot|PN|$ 为定值，验证切线斜率不存在的情况作答.

【详解】（1）解：设双曲线 C 的半焦距为 c ，依题意， $\frac{c}{a}=\sqrt{3}$ ，即有 $c=\sqrt{3}a$ ，则 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2}a$ ，

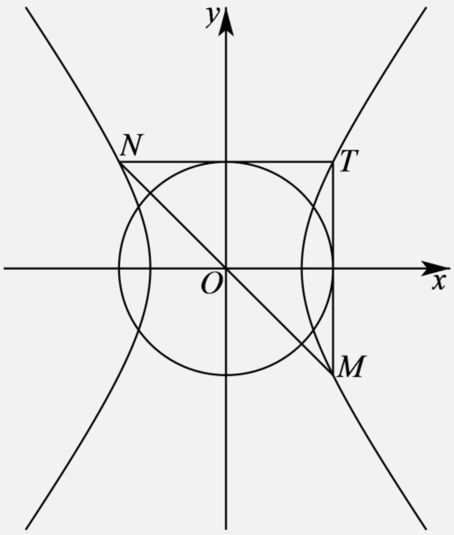
因为点 $T\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 在双曲线 C 上，则 $\frac{2}{a^2}-\frac{2}{2a^2}=1$ ，可得 $a=1$ ，则 $b=\sqrt{2}a=\sqrt{2}$ ，

因此，双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

（2）解：当切线的斜率不存在时，切线的方程为 $x=\sqrt{2}$ ，此时，圆心 O 到直线 $x=\sqrt{2}$ 的距离为 $\sqrt{2}$ ，合乎题意，

当切线的斜率存在时，设切线的方程为 $y-\sqrt{2}=k\left(x-\sqrt{2}\right)$ ，即 $kx-y-\sqrt{2}k+\sqrt{2}=0$ ，

由题意可得 $\frac{\left|\sqrt{2}-\sqrt{2}k\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$ ，解得 $k=0$ ，此时，切线方程为 $y=\sqrt{2}$ ，

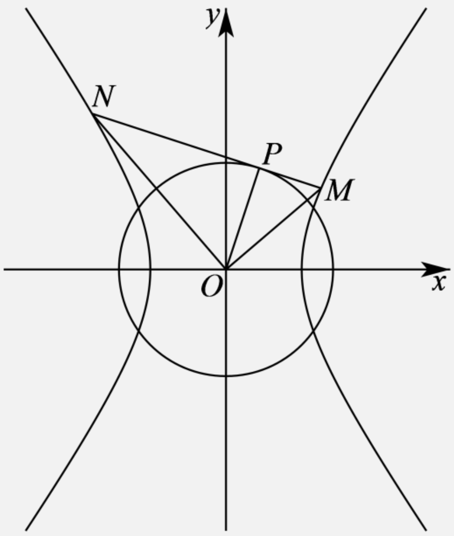


联立$\begin{cases}x=\sqrt{2}\\x^2-\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$，可得$\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=-\sqrt{2}\end{cases}$，即点$M\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$，

联立$\begin{cases}y=\sqrt{2}\\x^2-\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$，可得$\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}\end{cases}$，即点$N\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，

因此，$|MN|=\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^2}=4$.

（3）解：当圆O在点P处切线斜率不存在时，点$P(\sqrt{2},0)$或$P(-\sqrt{2},0)$，切线方程为$x=\sqrt{2}$或$x=-\sqrt{2}$，



由（1）及已知，得$|PM|=|PN|=\sqrt{2}$，则有$|PM|\cdot|PN|=2$，

当圆O在点P处切线斜率存在时，设切线方程为$y=kx+m$，设点$M\left(x_1,y_1\right)$、$N\left(x_2,y_2\right)$，

则有$\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，即$m^2=2\left(k^2+1\right)$，

由$\begin{cases} y=kx+m \\ 2x^2-y^2=2 \end{cases}$消去$y$得：$\left(k^2-2\right)x^2+2kmx+m^2+2=0$，

显然$\begin{cases} k^2-2\neq 0 \\ \Delta=4k^2m^2-4\left(k^2-2\right)\left(m^2+2\right)=8k^2+32>0 \end{cases}$，

由韦达定理可得$x_1+x_2=-\dfrac{2km}{k^2-2}$，$x_1x_2=\dfrac{m^2+2}{k^2-2}$，

而$\overrightarrow{OM}=\left(x_1,y_1\right)$，$\overrightarrow{ON}=\left(x_2,y_2\right)$，

则$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+\left(kx_1+m\right)\left(kx_2+m\right)=\left(k^2+1\right)x_1x_2+km\left(x_1+x_2\right)+m^2$

$=\left(k^2+1\right)\cdot\dfrac{m^2+2}{k^2-2}+km\cdot\dfrac{-2km}{k^2-2}+m^2=\dfrac{m^2+2k^2+2-k^2m^2}{k^2-2}+m^2=\dfrac{\left(2-k^2\right)m^2}{k^2-2}+m^2=0$，

因此$OM\perp ON$，

在$\mathrm{Rt}\triangle OMN$中，$OP\perp MN$于点P，则$\angle MOP=\dfrac{\pi}{2}-\angle OMP=\angle ONP$，

又因为$\angle OPN=\angle MPO$，所以，$\mathrm{Rt}\triangle OPN\backsim\mathrm{Rt}\triangle MPO$，

所以，$\dfrac{|OP|}{|PN|}=\dfrac{|PM|}{|OP|}$，则$|PM|\cdot|PN|=|OP|^2=2$，

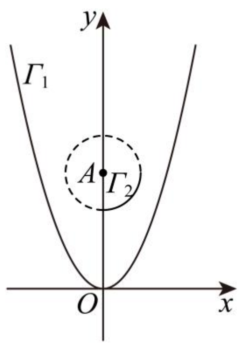
综上得$|PM|\cdot|PN|$为定值2.

【点睛】方法点睛：求定值问题常见的方法有两种：

（1）从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关；

（2）直接推理、计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

9．（2023上·上海黄浦·高三统考期中）设a为实数，Γ_1是以点$O(0,0)$为顶点，以点$F\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$为焦点的抛物线，$\Gamma_2$是以点$A(0,a)$为圆心、半径为1的圆位于$y$轴右侧且在直线$y=a$下方的部分.



(1)求Γ_1与Γ_2的方程；

(2)若直线$y=x+2$被Γ_1所截得的线段的中点在Γ_2上，求a的值；

(3)是否存在 a，满足：Γ_2 在 Γ_1 的上方，且 Γ_2 有两条不同的切线被 Γ_1 所截得的线段长相等？若存在，求出 a 的取值范围；若不存在，请说明理由．

【答案】(1) $\Gamma_1: x^2=y$，$\Gamma_2: x^2+(y-a)^2=1(x>0,y<a)$

(2) $a=\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$

(3)存在，$\dfrac{5}{4}<a<\dfrac{11}{8}$

【分析】（1）依题意列标准方程即可求解；

（2）依题意联立方程后利用韦达定理给出中点坐标，代入已求方程即可求解；

（3）先设出切线方程，和抛物线方程联立后表示出所截线段的长度，用导数即可求解.

【详解】（1）设 $\Gamma_1: x^2=2py$，则 $\dfrac{p}{2}=y_F=\dfrac{1}{4}$，解得 $p=\dfrac{1}{2}$，故 $\Gamma_1: x^2=y$，

依题意有 $\Gamma_2: x^2+(y-a)^2=1(x>0,y<a)$.

（2）设 $y=x+2$ 被 Γ_1 所截得的线段为 DE，中点为 G，

联立 $y=x+2$ 和 $\Gamma_1: x^2=y$ 有 $x^2-x-2=0$，故 $\begin{cases}x_D+x_E=1\\ x_Dx_E=-2\end{cases}, x_G=\dfrac{x_D+x_E}{2}=\dfrac{1}{2}$，

故 $y_G=x_G+2=\dfrac{5}{2}$，$G\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$ 代入 $\Gamma_2: x^2+(y-a)^2=1(x>0,y<a)$ 得：

$\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{5}{2}-a\right)^2=1\left(\dfrac{5}{2}<a\right)$，解得 $a=\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$.

（3）如图，Γ_2 在 Γ_1 的上方时，抛物线和圆无交点，联立 $x^2=y$ 和 $x^2+(y-a)^2=1$ 有

$y^2+(1-2a)y+a^2-1=0$ 且 $\Delta=(1-2a)^2-4(a^2-1)<0$，解得 $a>\dfrac{5}{4}$，

显然，Γ_2 切线斜率存在，设切线方程为 $y=kx+b$，

由 Γ_2 为四分之一圆知 $b<a, 0<k$，

又圆心到切线的距离等于半径：$\dfrac{|a-b|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，故 $b=a-\sqrt{1+k^2}$，

切线方程为 $y=kx+a-\sqrt{1+k^2}$，与 $x^2=y$ 联立得 $x^2-kx-a+\sqrt{1+k^2}=0$，

设 Γ_2 被 Γ_1 所截得的线段为 HK，则 $|x_H-x_K|=\sqrt{k^2+4a-4\sqrt{1+k^2}}$，

$|HK|=\sqrt{1+k^2}\,|x_H-x_K|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{k^2+4a-4\sqrt{1+k^2}}$，

记 $t=\sqrt{1+k^2}$，则 $t>1$，$|HK|=t\sqrt{t^2-1+4a-4t}=\sqrt{t^4-4t^3+(4a-1)t^2}$，

记 $f(t)=t^4-4t^3+(4a-1)t^2,t>1$，则 $f(1)=4a-5>0,\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)\to+\infty$，

依题意有：对给定的 a，$\exists d=|HK|$ 使得 $f(t)$ 和 $y=d^2$ 有两个交点，

由 $f'(t)=4t^3-12t^2+(8a-2)t=2t(2t^2-6t+4a-1)$ 知

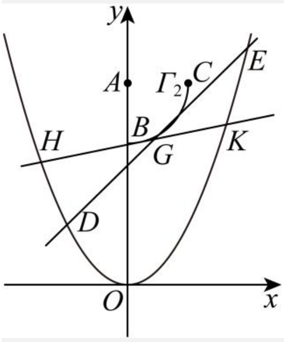
$\exists t>1$ 使 $2t^2-6t+4a-1<0$ 即可，

否则 $f(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调，不存在 $t_1\neq t_2$ 使得 $f(t_1)=f(t_2)$，

而 $t_1+t_2=-\dfrac{-6}{2}=3>2$，故只需 $\Delta=(-6)^2-4\times2(4a-1)>0$，

解得 $a<\dfrac{11}{8}$，

综上所述：$\dfrac{5}{4}<a<\dfrac{11}{8}$.



【点睛】(3) 先用切线满足的条件消去 b，再联立得所截线段长的表达式 $\sqrt{f(t)}$，依题意 $f(t)=d^2$ 有两正根，结合导数即可求解.

三、圆锥曲线

10．(2023·上海青浦·统考一模) 定义：如果曲线段 C 可以一笔画出，那么称曲线段 C 为单轨道曲线，比如圆、椭圆都是单轨道曲线；如果曲线段 C 由两条单轨道曲线构成，那么称曲线段 C 为双轨道曲线. 对于曲线 $\Gamma:\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=m(m>0)$ 有如下命题：p: 存在常数 m，使得曲线 Γ 为单轨道曲线；q: 存在常数 m，使得曲线 Γ 为双轨道曲线. 下列判断正确的是（　）.

A. p 和 q 均为真命题　　B. p 和 q 均为假命题

C. p 为真命题，q 为假命题　　D. p 为假命题，q 为真命题

【答案】A

【分析】根据方程确定研究曲线的性质，判断命题 p,q 的真假.

【详解】记 $f(x,y)=\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}-m$，

易得 $f(-x,y)=f(x,-y)=f(-x,-y)=f(x,y)=0$，因此曲线 $f(x,y)=0$ 关于 x 轴，y 轴成轴对称，关于原点成中心对称，

从几何上讲，曲线 Γ 是到两定点 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$ 的距离乘积为 m 的点的轨迹，

由 $f(x,y)=0$ 可得 $y=\pm\sqrt{\sqrt{4x^2+m^2}-x^2-1}$，因此它在 x 轴上方和下方分别是两个函数的图象，这两个函数图象在 x 轴上有公共点（方程 $y=0$ 的解相同），

由 $\sqrt{4x^2+m^2}-x^2-1\geq 0$ 得 $1-m\leq x^2\leq 1+m$，

$0<m<1$ 时，$-\sqrt{1+m}\leq x\leq -\sqrt{1-m}$ 或 $\sqrt{1-m}\leq x\leq\sqrt{1+m}$，

所以曲线 Γ 与 y 轴无公共点，曲线 Γ 是在 y 轴两侧的两个曲线构成，是双轨道曲线，

当 $m>1$ 时，$-\sqrt{1+m}\leq x\leq\sqrt{1+m}$，结合对称性知，曲线 Γ 是一个封闭曲线，是单轨道曲线，

（实际上上述过程中只要对 m 取一个特定值讨论即可）

命题 p,q 均正确，

故选：A．

【点睛】方法点睛：用方程确定曲线的性质，例如对称性，在曲线方程 $F(x,y)=0$ 中用 $-x$ 替换 x，方程不变，则曲线关于 y 轴对称，用 $-y$ 替换 y，方程不变，则曲线关于 x 轴对称，如果同时用 $-x$ 替换 x，$-y$ 替换 y，方程不变，则说明曲线关于原点对称，同样如果 x,y 互换后方程不变，曲线则关于直线 $y=x$ 对称等等，通过方程中变量的变化范围得出曲线点的坐标的变化范围，即曲线的范围，由变量变化的趋势得出曲线的变化趋势．

11．（2023上·上海虹口·高三统考期末）已知曲线 Γ 的对称中心为 O，若对于 Γ 上的任意一点 A，都存在 Γ 上两点 B，C，使得 O 为 $\triangle ABC$ 的重心，则称曲线 Γ 为“自稳定曲线”．现有如下两个命题：

①任意椭圆都是“自稳定曲线”；②存在双曲线是“自稳定曲线”．

则（　）

A．①是假命题，②是真命题　　B．①是真命题，②是假命题

C．①②都是假命题　　D．①②都是真命题

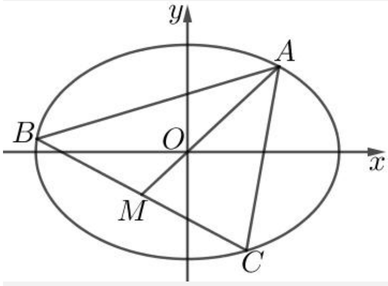
【答案】B

【分析】设出椭圆、双曲线方程及点 A,B,C 的坐标，结合三角形重心坐标公式利用点A的坐标求出直线 BC 方程，再与椭圆或双曲线方程联立，判断是否有两个不同解即得．

【详解】椭圆是“自稳定曲线”．

设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a^2\neq b^2,a^2>0,b^2>0)$，令 $A(x_0,y_0)$，则 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$，设 $B(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，

由O是$\triangle ABC$的重心，知$\begin{cases}x_1+x_2=-x_0\\y_1+y_2=-y_0\end{cases}$，直线$BC$过点$M(-\frac{x_0}{2},-\frac{y_0}{2})$，



当$y_0=0$时，若$A(a,0)$，直线$y=-\frac{a}{2}$与椭圆有两个交点B,C，符合题意，

若$A(-a,0)$，直线$y=\frac{a}{2}$与椭圆有两个交点B,C，符合题意，

则当$y_0=0$，即$A(\pm a,0)$时，存在两点B,C，使得$\triangle ABC$的重心为原点O，

同理，当$x_0=0$，即$A(0,\pm b)$时，存在两点B,C，使得$\triangle ABC$的重心为原点O，

当$x_0y_0\neq 0$时，$\begin{cases}b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2\\b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2\end{cases}$，两式相减得$b^2(x_1-x_2)(x_1+x_2)+a^2(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0$，

直线BC的斜率$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$，方程为$y+\frac{y_0}{2}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x+\frac{x_0}{2})$，即$y=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x-\frac{b^2}{2y_0}$，

由$\begin{cases}y=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x-\frac{b^2}{2y_0}\\b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\end{cases}$消去$y$并整理得：$x^2+x_0x+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{b^2}y_0^2=0$，

$\Delta=x_0^2-a^2+\frac{4a^2}{b^2}y_0^2=-\frac{a^2}{b^2}y_0^2+\frac{4a^2}{b^2}y_0^2=\frac{3a^2}{b^2}y_0^2>0$，即直线$BC$与椭圆交于两点，且$O$是$\triangle ABC$的重心，

即当$x_0y_0\neq 0$时，对于点A，在椭圆上都存在两点B,C，使得O为$\triangle ABC$的重心，

综上，椭圆上任意点A，在椭圆上都存在两点B,C，使得O为$\triangle ABC$重心，①为真命题；

双曲线不是“自稳定曲线”.

由对称性，不妨令双曲线方程为$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1(m>0.n>0)$，令$A(t,s)$，则$n^2t^2-m^2s^2=m^2n^2$，设$B(t_1,s_1),C(t_2,s_2)$，

假设O是$\triangle ABC$的重心，则$\begin{cases}t_1+t_2=-t\\s_1+s_2=-s\end{cases}$，直线$BC$过点$(-\frac{t}{2},-\frac{s}{2})$，

当$s=0$时，直线$x=-\frac{m}{2}$或直线$x=\frac{m}{2}$与双曲线$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$都不相交，因此$s\neq 0$，

$\begin{cases}n^2t_1^2-m^2s_1^2=m^2n^2\\n^2t_2^2-m^2s_2^2=m^2n^2\end{cases}$，两式相减得$n^2(t_1-t_2)(t_1+t_2)-m^2(s_1-s_2)(s_1+s_2)=0$，

直线 BC 的斜率 $\frac{s_1-s_2}{t_1-t_2}=\frac{n^2t}{m^2s}$，方程为 $y+\frac{s}{2}=\frac{n^2t}{m^2s}(x+\frac{t}{2})$，即 $y=\frac{n^2t}{m^2s}x+\frac{n^2}{2s}$，

由 $\begin{cases}y=\frac{n^2t}{m^2s}x+\frac{n^2}{2s}\\ n^2x^2-m^2y^2=m^2n^2\end{cases}$ 消去 y 并整理得：$x^2+tx+\frac{m^2}{4}+\frac{m^2}{n^2}s^2=0$，

$\Delta'=t^2-a^2-\frac{4m^2}{n^2}s^2=\frac{m^2}{n^2}s^2-\frac{4m^2}{n^2}s^2=-\frac{3m^2}{n^2}s^2<0$，即直线 BC 与双曲线不相交，

所以不存在双曲线，其上点 A 及某两点 B,C，O 为 $\triangle ABC$ 的重心，②是假命题.

故选：B

【点睛】思路点睛：涉及直线被圆锥曲线所截弦中点及直线斜率问题，可以利用“点差法”，设出弦的两个端点坐标，代入曲线方程作差求解，还要注意验证.

12．（2023 上·上海松江·高三统考期末）双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右焦点坐标是________.

【答案】$(2,0)$

【分析】根据双曲线的定义求解.

【详解】因为 $c^2=a^2+b^2=4$，所以 $c=2$，

且焦点在 x 轴上，所以右焦点为 $(2,0)$.

故答案为：$(2,0)$.

13．（2023·上海杨浦·统考一模）若椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 长轴长为 4，则其离心率为________.

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{2}$/$\frac{1}{2}\sqrt{3}$

【分析】根据长轴长确定 $a=2$，计算 $c=\sqrt{3}$，得到离心率.

【详解】椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 长轴长为 4，即 $2a=4$，$a=2$，$c=\sqrt{a^2-1}=\sqrt{3}$，

故 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

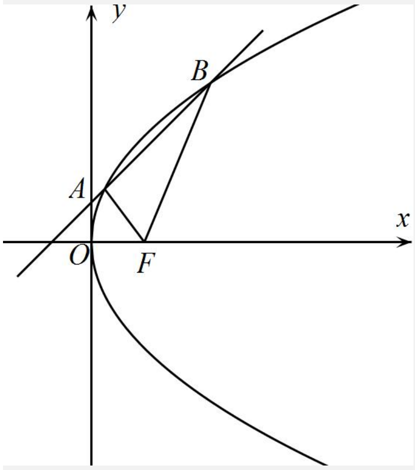
故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14．（2023·上海杨浦·统考一模）已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，第一象限的 A 、B 两点在抛物线上，且满足 $|BF|-|AF|=4$，$|AB|=4\sqrt{2}$.若线段 AB 中点的纵坐标为 4，则抛物线的方程为________.

【答案】$y^2=8x$

【分析】先根据焦半径公式得到 x_1,x_2 的关系，然后根据弦长公式求解出 k_{AB}，结合两点间斜率公式以及点在抛物线上求解出 p 的值，则抛物线方程可求.

【详解】设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，



因为$|BF|-|AF|=4$，

所以$\left(x_2+\frac{p}{2}\right)-\left(x_1+\frac{p}{2}\right)=4$，所以$x_2-x_1=4$，

又因为$|AB|=\sqrt{1+k_{AB}^2}\times|x_1-x_2|=4\sqrt{2}$，所以$k_{AB}^2=1$，

因为A,B都在第一象限，所以$k_{AB}=1$，

又因为$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p}}=\frac{2p}{y_1+y_2}=1$且$y_1+y_2=4\times2=8$，

所以$2p=8$，所以$p=4$，所以抛物线方程为$y^2=8x$，

故答案为：$y^2=8x$.

15．（2023·上海普陀·统考一模）若抛物线$x^2=my$的顶点到它的准线距离为$\frac{1}{2}$，则正实数$m=$______.

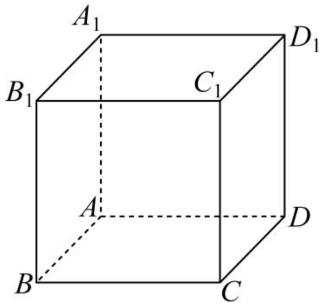
【答案】2

【分析】根据顶点到它的准线距离为$\frac{m}{4}$即可得到方程，解出即可.

【详解】$x^2=my=2\cdot\frac{m}{2}y$，因为$m$为正实数，则$\frac{m}{4}=\frac{1}{2}$，则$m=2$，

故答案为：2.

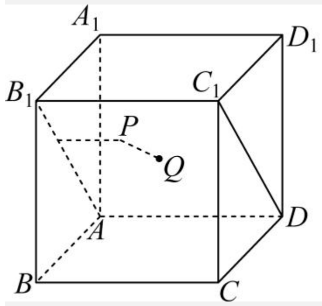
16.（2023·上海闵行·统考一模）已知点P在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的表面上，P到三个平面$ABCD$、ADD_1A_1、ABB_1A_1中的两个平面的距离相等，且P到剩下一个平面的距离与P到此正方体的中心的距离相等，则满足条件的点P的个数为________.

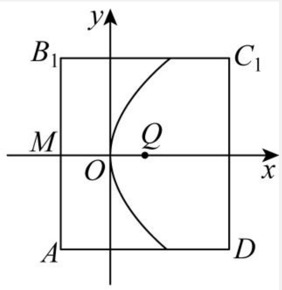


【答案】6

【分析】确定 P 在平面 ADC_1B_1 上，根据 $d_{P-AB_1}=|PQ|$ 得到 P 的轨迹为平面 ADC_1B_1 内的一条抛物线，建立坐标系确定抛物线方程，计算交点得到答案.

【详解】若 P 到平面 $ABCD$、ADD_1A_1 距离相等，根据对称性知 P 在平面 ADC_1B_1 上，





$AD\perp$ 平面 AA_1B_1B， $AD\subset$ 平面 ADC_1B_1，故平面 $ADC_1B_1\perp$ 平面 AA_1B_1B，

故 P 到平面 ABB_1A_1 的距离即 P 到 AB_1 的距离，

设正方体的中心为 Q，即 $d_{P-AB_1}=|PQ|$，故 P 的轨迹为平面 ADC_1B_1 内的一条抛物线，

不妨取正方体边长为 4， AB_1 中点为 M，以 MQ 所在的直线为 x 轴，

以线段 MQ 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系，

抛物线方程为 $y^2=4x$， $x=2$ 时， $y=\pm2\sqrt{2}$，故抛物线与棱 B_1C_1 和 AD 相交，

故共有 $2\times3=6$ 个点满足条件.

故答案为：6

【点睛】关键点睛：本题考查了立体几何，抛物线的轨迹方程，意在考查学生的计算能力，空间想象能力和综合应用能力，其中根据题意得到动点的轨迹方程是解题的关键，

17.（2023·上海奉贤·统考一模）已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆的左右焦点分别为 F_1、F_2，直角坐标原点记为 O．设点 $P(0,t)$，过点 P 作倾斜角为锐角的直线 l 与椭圆交于不同的两点 B、C．

(1)求椭圆的方程；

(2)设椭圆上有一动点T，求$\overrightarrow{PT}\cdot\left(\overrightarrow{TF_1}-\overrightarrow{TF_2}\right)$的取值范围；

(3)设线段BC的中点为M，当$t\geq\sqrt{2}$时，判别椭圆上是否存在点Q，使得非零向量$\overrightarrow{OM}$与向量$\overrightarrow{PQ}$平行，请说明理由．

【答案】(1)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2)$\left[-4\sqrt{3},4\sqrt{3}\right]$

(3)不存在点Q，使得$\overrightarrow{OM}//\overrightarrow{PQ}$，理由见解析

【分析】（1）由题意计算即可得；

（2）由设出T点坐标，表示出$\overrightarrow{PT}$，结合$\overrightarrow{TF_1}-\overrightarrow{TF_2}=-\overrightarrow{F_1F_2}$与$T$点坐标范围计算即可得.

（3）设出直线方程后联立得一元二次方程，由直线l与椭圆交于不同的两点可得该方程$\Delta>0$，并由方程中的韦达定理表示出直线OM斜率，假设存在该点Q，则有$k_{PQ}=k_{OM}$，借此设出直线PQ方程，则该直线与椭圆必有焦点，即联立后有$\Delta\geq0$，结合前面所得可计算出t的范围.

【详解】（1）由题意，得$c=\sqrt{3}$，$a=2$，所以$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

则椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）设动点$T(x,y)$，$\overrightarrow{F_1F_2}=\left(2\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{PT}=(x,y-t)$，

$\overrightarrow{PT}\cdot\left(\overrightarrow{TF_1}-\overrightarrow{TF_2}\right)=-\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=-2\sqrt{3}x$，

$\because x\in[-2,2]$，所以$\overrightarrow{PT}\cdot\left(\overrightarrow{TF_1}-\overrightarrow{TF_2}\right)$的取值范围为$\left[-4\sqrt{3},4\sqrt{3}\right]$；

（3）显然直线的斜率存在，故可设直线$l:y=kx+t$，$B(x_1,y_1)$、$C(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}y=kx+t\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消去$y$得$\left(1+4k^2\right)x^2+8ktx+4t^2-4=0$，

$\Delta=-16t^2+64k^2+16>0$，即$k^2>\frac{t^2-1}{4}$①，

则$x_1+x_2=-\frac{8kt}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4t^2-4}{1+4k^2}$，

则$\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{4kt}{1+4k^2}$，$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{k\left(x_1+x_2\right)+2t}{2}=-\frac{4k^2t}{1+4k^2}+t=\frac{t}{1+4k^2}$，

则$x_M=\left(-\frac{4kt}{1+4k^2},\frac{t}{1+4k^2}\right)$，

故 $k_{OM}=-\frac{1}{4k}$，

若 $\overrightarrow{OM}//\overrightarrow{PQ}$，则有 $k_{PQ}=k_{OM}=-\frac{1}{4k}$，

设直线 PQ 为 $y=-\frac{1}{4k}x+t$，

联立 $\begin{cases} y=-\frac{1}{4k}x+t \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，消去 y 有 $\left(1+\frac{1}{4k^2}\right)x^2-\frac{2t}{k}x+4t^2-4=0$，

要使得存在点 Q，则 $\Delta_2=\frac{4t^2}{k^2}-4\left(1+\frac{1}{4k^2}\right)\left(4t^2-4\right)\geq 0$，

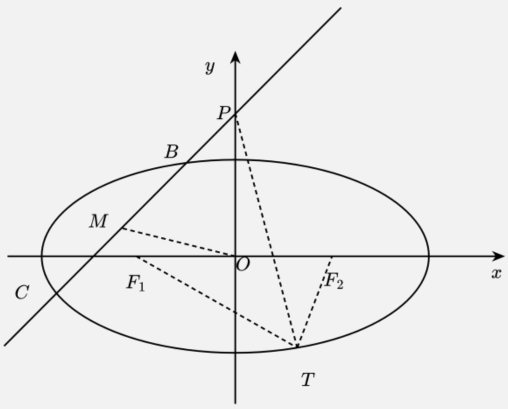
整理得 $16+\frac{4}{k^2}-16t^2\geq 0$，

故 $k^2\leq\frac{1}{4t^2-4}$②，

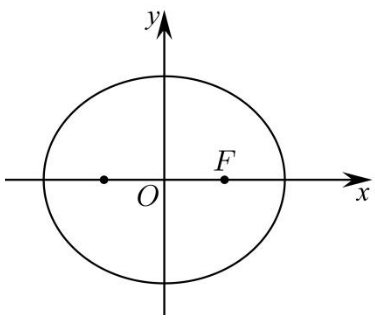
由①②式得，$\frac{t^2-1}{4}<k^2\leq\frac{1}{4t^2-4}$，

则 $\frac{t^2-1}{4}<\frac{1}{4t^2-4}$，解得 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$，

所以当 $t\geq\sqrt{2}$ 时，不存在点 Q，使得 $\overrightarrow{OM}//\overrightarrow{PQ}$.



18.（2023·上海青浦·统考一模）已知椭圆 Γ 的离心率是 $\frac{1}{2}$，长轴长 4，椭圆的中心是坐标原点，焦点在 x 轴上.



(1)求椭圆 Γ 的标准方程；

(2)已知 A，B，C 是椭圆 Γ 上三个不同的点，F 是椭圆 Γ 的右焦点，若原点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，求

$|FA|+|FB|+|FC|$的值；

(3)已知$T(1,1)$，椭圆Γ四个动点M，N，P，Q满足$\overrightarrow{MT}=3\overrightarrow{TQ}$，$\overrightarrow{NT}=3\overrightarrow{TP}$，求直线$MN$的方程．

【答案】(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(2)6

(3)$3x+4y-2=0$

【分析】（1）根据离心率及长轴长直接可得a，b，c，可得椭圆方程；

（2）设出三点坐标，分别表示$|FA|$，$|FB|$，$|FC|$，再根据重心的坐标化简可得$|FA|+|FB|+|FC|$.

（3）分别设$M(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$N(x_3,y_3)$，$P(x_4,y_4)$，由$\overrightarrow{MT}=3\overrightarrow{TQ}$可得$\begin{cases}x_2=\frac{4-x_1}{3}\\ y_2=\frac{4-y_1}{3}\end{cases}$，根据$M$，$Q$均在椭圆上，可得$\frac{1}{4}(2-x_1)+\frac{1}{3}(2-y_1)=1$，同理可得$\frac{1}{4}(2-x_3)+\frac{1}{3}(2-y_3)=1$，即可得$MN$方程.

【详解】（1）由题意得，$2a=4$，$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，

则$a=2$，$c=1$，所以$a^2=4$，$b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆Γ的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）设$A(x_a,y_a)$，$B(x_b,y_b)$，$C(x_c,y_c)$，

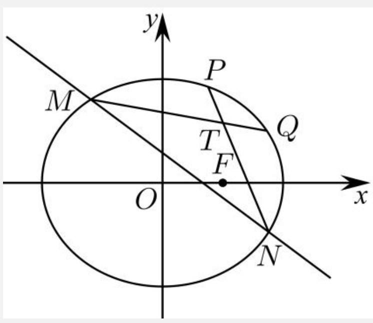
则$\frac{x_a^2}{4}+\frac{y_a^2}{3}=1$，即$y_a^2=3-\frac{3}{4}x_a^2$，

$$|FA|=\sqrt{(x_a-1)^2+y_a^2}=\sqrt{(x_a-1)^2+3-\frac{3x_a^2}{4}}=\sqrt{\left(\frac{x_a}{2}-2\right)^2}=2-\frac{1}{2}x_a$$

同理$|FB|=2-\frac{1}{2}x_b$，$|FC|=2-\frac{1}{2}x_c$

又O是$\triangle ABC$的重心，所以$x_a+x_b+x_c=0$

所以，$|FA|+|FB|+|FC|=6$；

（3）

设 $M(x_1,y_1)$， $Q(x_2,y_2)$， $N(x_3,y_3)$， $P(x_4,y_4)$， $T(1,1)$，

因为 $\overrightarrow{MT}=3\overrightarrow{TQ}$，所以 $\begin{cases}1-x_1=3(x_2-1)\\1-y_1=3(y_2-1)\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_2=\dfrac{4-x_1}{3}\\y_2=\dfrac{4-y_1}{3}\end{cases}$

又 $M(x_1,y_1)$， $Q(x_2,y_2)$ 都在椭圆上，

所以 $\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$， $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4-x_1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4-y_1}{3}\right)^2=1$，

即 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=1\\\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{4-x_1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4-y_1}{3}\right)^2=1\end{cases}$，

于是 $\dfrac{1}{4}(4-2x_1)\cdot 4+\dfrac{1}{3}(4-2y_1)\cdot 4=8$，即 $\dfrac{1}{4}(2-x_1)+\dfrac{1}{3}(2-y_1)=1$，

又 $\overrightarrow{NT}=3\overrightarrow{TP}$，同理得 $\dfrac{1}{4}(2-x_3)+\dfrac{1}{3}(2-y_3)=1$

所以，直线 MN 的方程为 $\dfrac{1}{4}(2-x)+\dfrac{1}{3}(2-y)=1$，即 $3x+4y-2=0$.

【点睛】解决直线与椭圆的综合问题时，要注意：

(1)注意观察应用题设中的每一个条件，明确确定直线、椭圆的条件；

(2)强化有关直线与椭圆联立得出一元二次方程后的运算能力，重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题.