空间向量与立体几何

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、点、直线、平面之间的位置关系

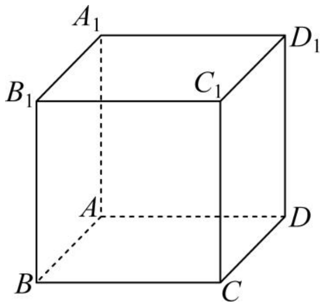
1．（2023·上海嘉定·统考一模）已知四面体 $ABCD, AB=BC, AD=CD$．分别对于下列三个条件：

①$AD\perp BC$；②$AC=BD$；③$AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$，

是 $AB\perp CD$ 的充要条件的共有几个（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

2．（2023·上海闵行·统考一模）已知点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面上，P 到三个平面 $ABCD$、ADD_1A_1、ABB_1A_1 中的两个平面的距离相等，且 P 到剩下一个平面的距离与 P 到此正方体的中心的距离相等，则满足条件的点 P 的个数为________．



3．（2023·上海普陀·统考一模）图 1 所示的是等腰梯形 $ABCD$，$AB//DC$，$AB=2DC=4$，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，$DE\perp AB$ 于 E 点，现将 ΔADE 沿直线 DC 折起到 ΔPDE 的位置，形成一个四棱锥 $P-EBCD$，如图 2 所示.

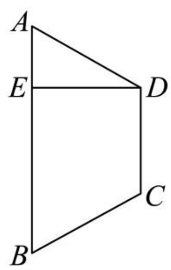


图1

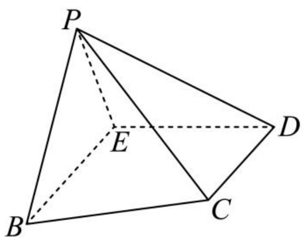


图2

(1)若 $PC=2\sqrt{2}$，求证：$PE\perp$ 平面 $EBCD$；

(2)若直线 PE 与平面 $EBCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，求二面角 $P-BC-E$ 的大小.

二、空间几何体

4．（2023·上海长宁·统考一模）豆腐发酵后表面长出一层白绒绒的长毛就成了毛豆腐，将三角形豆腐 ABC 悬空挂在发酵空间内，记发酵后毛豆腐所构成的几何体为 T.若忽略三角形豆腐 ABC 的厚度，设

$AB=3,BC=4,AC=5$，点 P 在 $\triangle ABC$ 内部.假设对于任意点 P，满足 $PQ\le 1$ 的点 Q 都在 T 内，且对于 T 内任意一点 Q，都存在点 P，满足 $PQ\le 1$，则 T 的体积为（　）

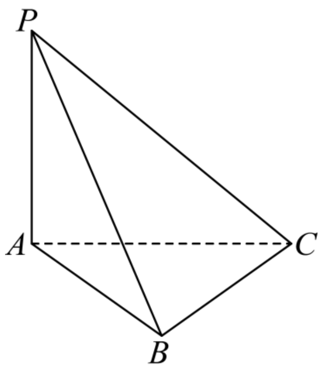
A．$12+7\pi$　　B．$12+\frac{22\pi}{3}$　　C．$14+7\pi$　　D．$14+\frac{22\pi}{3}$

5．（2023·上海闵行·统考一模）已知圆锥的底面周长为 4π，母线长为 3，则该圆锥的侧面积为________.

6．（2023 上·上海浦东新·高三统考期末）已知圆锥的母线与底面所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，体积为 3π，则圆锥的底面半径为___________.

7．（2023·上海崇明·统考一模）已知圆锥的母线与底面所成角为 $45°$，高为 1，则该圆锥的母线长为__________.

8．（2023·上海奉贤·统考一模）在《九章算术》中，将四个面都是直角三角形的四面体称为鳖臑．如图，已知四面体 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$PA=BC=1$.



(1)若 $AB=1,\ PC=\sqrt{3}$，求证：四面体 $P-ABC$ 是鳖臑，并求该四面体的体积；

(2)若四面体 $P-ABC$ 是鳖臑，当 $AC=a\left(a>1\right)$ 时，求二面角 $A-BC-P$ 的平面角的大小.

9．（2023·上海嘉定·统考一模）中国历史悠久，积累了许多房屋建筑的经验．房梁为柱体，或取整根树干而制为圆柱形状，或作适当裁减而制为长方体形状，例如下图所示.

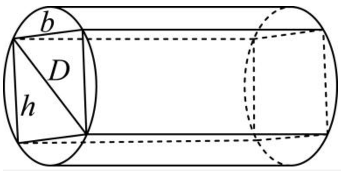
材质确定的梁的承重能力取决于截面形状，现代工程科学常用抗弯截面系数 W 来刻画梁的承重能力．对于两个截面积相同的梁，称 W 较大的梁的截面形状更好．三种不同截面形状的梁的抗弯截面系数公式，如下表所列，

	圆形截面	正方形截面	矩形截面
条件	r 为圆半径	a 为正方形边长	h 为矩形的长，b 为矩形的宽，$h>b$

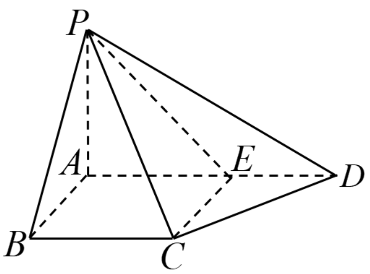
抗弯截面系数	$W_1=\frac{\pi}{4}r^3$	$W_2=\frac{1}{6}a^3$	$W_3=\frac{1}{6}bh^2$

(1)假设上表中的三种梁的截面面积相等，请问哪一种梁的截面形状最好？并具体说明；

(2)宋朝学者李诫在《营造法式》中提出了矩形截面的梁的截面长宽之比应定为$3:2$的观点．考虑梁取材于圆柱形的树木，设矩形截面的外接圆的直径为常数D，如下图所示，请问$h:b$为何值时，其抗弯截面系数取得最大值，并据此分析李诫的观点是否合理．



10．（2023上·上海松江·高三统考期末）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$AB\perp AD$，点E在线段AD上，且$CE//AB$．

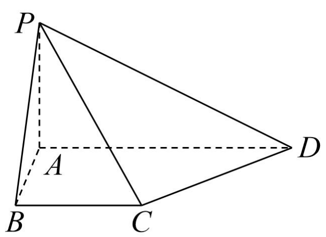


(1)求证：$CE\perp$平面PAD；

(2)若四棱锥$P-ABCD$的体积为$\frac{5}{6}$，$AB=1$，$AD=3$，$CD=\sqrt{2}$，$\angle CDA=45^\circ$，求二面角$P-CE-A$的大小．

三、空间向量与立体几何

11．（2023上·上海奉贤·高三校考期中）如图，已知四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$是直角梯形，$AD//BC$，$AD=4$，$\angle ABC=90^\circ$，$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AB=BC=2$，下列说法正确的是（　　）



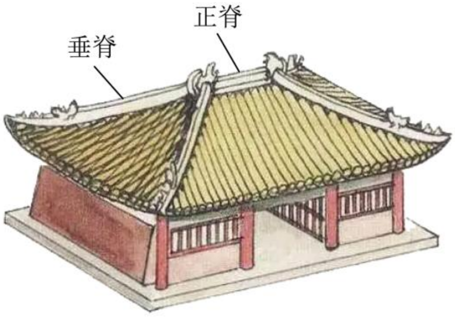
A．PB与CD所成的角是30°

B．平面 PCD 与平面 PBA 所成的锐二面角余弦值是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

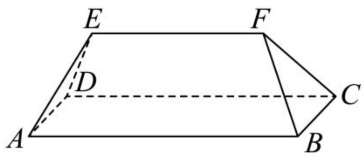
C．PB 与平面 PCD 所成的角的正弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

D．M 是线段 PC 上动点，N 为 AD 中点，则点 P 到平面 BMN 距离最大值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

12．（2023 上·上海·高三上海市进才中学校考期中）庑殿式屋顶是中国古代建筑中等级最高的屋顶形式，分为单檐庑殿顶与重檐庑殿顶．单檐庑殿顶主要有一条正脊和四条垂脊，前后左右都有斜坡（如图①），类似五面体 $FE-ABCD$ 的形状（如图②），若四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB//EF$，且 $AB=CD=2EF=2BC=8$，$EA=ED=FB=FC=3$，则五面体 $FE-ABCD$ 的表面积为________．



①



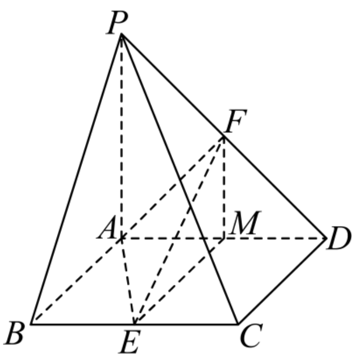
②

13．（2023·上海奉贤·统考一模）在四面体 $P-ABC$ 中，若底面 ABC 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,1,0)$，且 $\overrightarrow{CP}=(2,2,-1)$，则顶点 P 到底面 ABC 的距离为____________．

14．（2023·上海崇明·统考一模）在空间直角坐标系中，点 $P(1,-2,3)$ 到 xOy 平面的距离为__________．

15．（2023·上海长宁·统考一模）若向量 $\vec{a}=(1,0,2)$，$\vec{b}=(0,1,-1)$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量的坐标为______．

16．（2023 上·上海嘉定·高三上海市嘉定区第一中学校考期中）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$PA=2$，$PA\perp AB$，E 为 BC 的中点，F 为 PD 上一点，$EF//$ 平面 PAB．

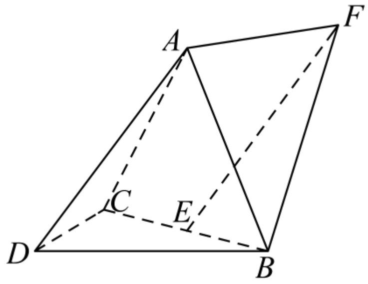


(1)求证：F 为 PD 的中点；

(2)若 $AD\perp PB$，求直线 AD 与平面 AEF 所成角的正弦值.

17．（2023 上·上海虹口·高三校考期中）如图，三棱锥 $A-BCD$ 中，$DA=DB=DC=2$，$BD\perp CD$，

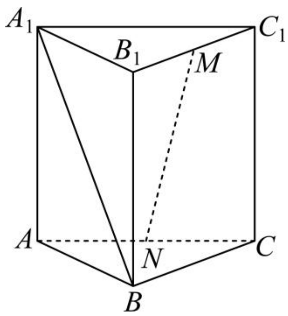
$\angle ADB=\angle ADC=60°$，$E$ 为 BC 的中点.



(1)证明：$BC\perp DA$；

(2)点 F 满足 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求平面 DAB 和平面 FAB 所成的锐二面角.

18.（2023上·上海·高三上海市行知中学校考期中）如图，正直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$BC=AB=AA_1$，$\angle ABC=90°$，M 是 B_1C_1 的中点，N 是 AC 的中点.



(1)判断直线 MN 与直线 BC 的位置关系并证明；

(2)求直线 A_1B 与平面 BCC_1B_1 所成的角的大小.

空间向量与立体几何

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、点、直线、平面之间的位置关系

1．（2023·上海嘉定·统考一模）已知四面体 $ABCD, AB=BC, AD=CD$． 分别对于下列三个条件：

① $AD\perp BC$；② $AC=BD$；③ $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$，

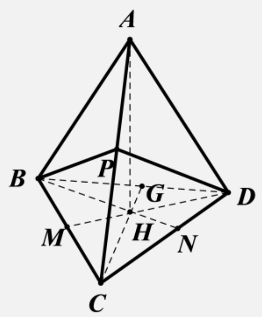
是 $AB\perp CD$ 的充要条件的共有几个（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】C

【分析】根据题意，逐项分析判断即可．

【详解】



取线段 AC 中点 P，连接 BP,DP，

因为 $AB=BC, AD=CD$，

所以 $AC\perp BP, AC\perp DP$，

又 $BP\cap DP=P$， $BP\subset$ 平面 BDP， $DP\subset$ 平面 BDP，

所以 $AC\perp$ 平面 BDP，所以 $AC\perp BD$，

过 A 作 $AH\perp$ 平面 BCD，

连接 DH,BH,CH 并延长分别交 BC,CD,BD 于 M,N,G，

则 $AH\perp BD$， $AH\cap AC=A$，

所以 $BD\perp$ 平面 ACH， $CH\subset$ 平面 ACH，

所以 $BD\perp CH$，

对于①，若 $AD\perp BC$，又 $AD\perp AH$，$AH\cap AD=A$，

则 $BC\perp$ 平面 ADH，则 $BC\perp DH$，

所以点 H 为三角形 BCD 垂心，

则 $CD\perp BH$，又 $CD\perp AH$，

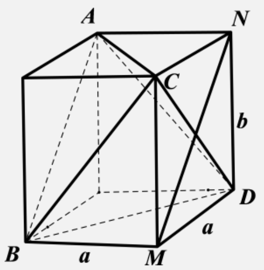
同理可知 $CD\perp$ 平面 ABH， $AB\subset$ 平面 ABH，

所以 $AB \perp CD$.

若已知 $AB \perp CD$，同理可证 $AD \perp BC$，

所以 $AD \perp BC$ 是 $AB \perp CD$ 的充要条件，①正确；

对于②，在如图立方体中，设 $BM = MD = a, DN = b$，



则易知四面体 $ABCD, AB = BC, AD = CD$，且 $AC = BD = \sqrt{2}a$，

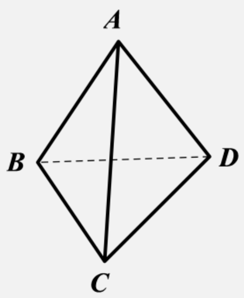
易知 $AB // MN$，若使 $AB \perp CD$ 则需 $AB \perp MN$，而在矩形 $NCMD$ 中，

当且仅当 $a = b$ 时，$AB \perp MN$，

所以在四面体 $ABCD, AB = BC, AD = CD$ 中，$AC = BD$ 不为 $AB \perp CD$ 的充要条件，

所以②错误；

对于③，在四面体 $ABCD, AB = BC, AD = CD$ 中，



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right| \cos\angle BAD - \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right| \cos\angle BAC$$

$$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right| \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} - \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right| \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$$

$$= \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2} - \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{BC^2 + AD^2 - BD^2 - AC^2}{2}$$

因为 $AB = BC, AD = CD$，

所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \dfrac{BC^2 + AD^2 - BD^2 - AC^2}{2} = \dfrac{AB^2 + CD^2 - BD^2 - AC^2}{2}$

所以若 $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$，即 $AB \perp CD$，

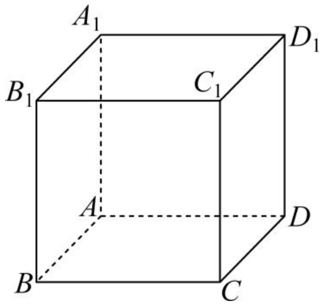
若 $AB \perp CD$，即 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$，则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \dfrac{AB^2 + CD^2 - BD^2 - AC^2}{2} = 0$，

则 $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$，

所以 $AB^2+CD^2=AC^2+BD^2$ 为 $AB\perp CD$ 的充要条件，③正确；

故选：C

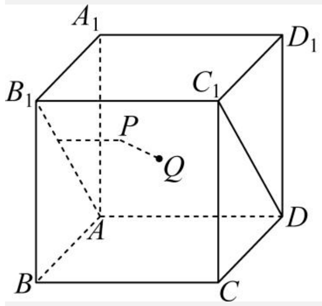
2.（2023·上海闵行·统考一模）已知点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面上，P 到三个平面 $ABCD$、ADD_1A_1、ABB_1A_1 中的两个平面的距离相等，且 P 到剩下一个平面的距离与 P 到此正方体的中心的距离相等，则满足条件的点 P 的个数为________.

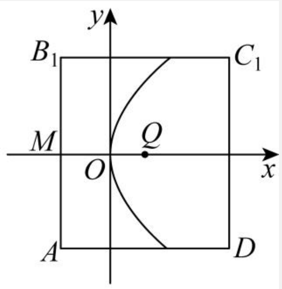


【答案】6

【分析】确定 P 在平面 ADC_1B_1 上，根据 $d_{P-AB_1}=|PQ|$ 得到 P 的轨迹为平面 ADC_1B_1 内的一条抛物线，建立坐标系确定抛物线方程，计算交点得到答案.

【详解】若 P 到平面 $ABCD$、ADD_1A_1 距离相等，根据对称性知 P 在平面 ADC_1B_1 上，





$AD\perp$ 平面 AA_1B_1B，$AD\subset$ 平面 ADC_1B_1，故平面 $ADC_1B_1\perp$ 平面 AA_1B_1B，

故 P 到平面 ABB_1A_1 的距离即 P 到 AB_1 的距离，

设正方体的中心为 Q，即 $d_{P-AB_1}=|PQ|$，故 P 的轨迹为平面 ADC_1B_1 内的一条抛物线，

不妨取正方体边长为 4，AB_1 中点为 M，以 MQ 所在的直线为 x 轴，

以线段 MQ 的垂直平分线为 y 轴，建立直角坐标系，

抛物线方程为 $y^2=4x$，$x=2$ 时，$y=\pm2\sqrt{2}$，故抛物线与棱 B_1C_1 和 AD 相交，

故共有 $2\times3=6$ 个点满足条件.

故答案为：6

【点睛】关键点睛：本题考查了立体几何，抛物线的轨迹方程，意在考查学生的计算能力，空间想象能力和综合应用能力，其中根据题意得到动点的轨迹方程是解题的关键，

3．（2023·上海普陀·统考一模）图 1 所示的是等腰梯形 $ABCD$， $AB//DC$， $AB=2DC=4$， $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$， $DE\perp AB$ 于 E 点，现将 ΔADE 沿直线 DC 折起到 ΔPDE 的位置，形成一个四棱锥 $P-EBCD$，如图 2 所示.

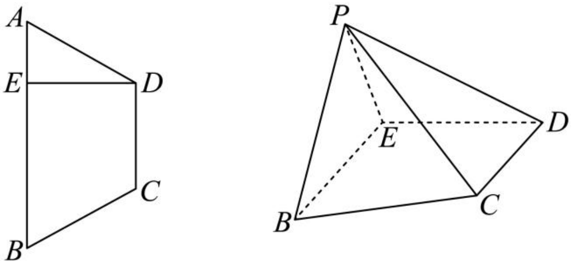


图1　　　　图2

(1)若 $PC=2\sqrt{2}$，求证： $PE\perp$ 平面 $EBCD$；

(2)若直线 PE 与平面 $EBCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，求二面角 $P-BC-E$ 的大小.

【答案】(1)证明见解析

(2) $\arccos\frac{5\sqrt{29}}{29}$

【分析】（1）连接 CE，由 $PC^2=PE^2+EC^2$，证得 $PE\perp EC$,再由 $PE\perp ED$，利用线面垂直的判定定理，即可证得 $PE\perp$ 平面 $EBCD$；

（2）以 E 为原点，建立空间直角坐标系，根据题意证得平面 $PEB\perp$ 平面 $EBCD$，过点 P 作 $PF\perp BE$，证得 $PF\perp$ 平面 $EBCD$，得到 $\angle PEB=\frac{\pi}{3}$，分别求得平面 PBC 和平面 $EBCD$ 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},1,5)$ 和 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$，结合向量的夹角公式，即可求解.

【详解】（1）证明：如图所示，连接 CE，

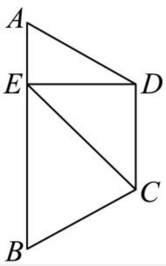
因为等腰梯形 $ABCD$， $AB//DC$， $AB=2DC=4$， $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$， $DE\perp AB$，

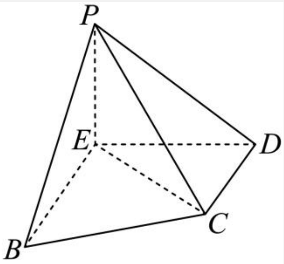
可得 $AE=1,DE=\sqrt{3}$，且 $CE=\sqrt{DE^2+CD^2}=\sqrt{7}$,即 $PE=1$，

因为 $PC=2\sqrt{2}$，则 $PC^2=PE^2+EC^2$，所以 $PE\perp EC$，

又因为 $PE\perp ED$，且 $CE\cap DE=E$， $CE,DE\subset$ 平面 $EBCD$，

所以 $PE\perp$ 平面 $EBCD$.





（2）解：以 E 为原点，以 DB,ED 所在的直线分别为 x,y 轴，以过点 E 垂直于平面 $EBCD$ 为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，

因为 $DE\perp EB,DE\perp PE$，且 $EB\cap PE=E$， $EB,PE\subset$ 平面 PEB，

所以 $DE\perp$ 平面 PEB，

又因为 $DE\subset$ 平面 $EBCD$，所以平面 $PEB\perp$ 平面 $EBCD$，

过点 P 作 $PF\perp BE$ 于点 F，因为平面 $PEB\cap$ 平面 $EBCD=BE$，

所以 $PF\perp$ 平面 $EBCD$，所以 $\angle PEB$ 为 PE 与平面 $EBCD$ 所成的角，所以 $\angle PEB=\dfrac{\pi}{3}$，

可得 $P(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}),B(3,0,0),C(2,\sqrt{3},0)$，则 $\overrightarrow{BP}=(-\frac{5}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3},0)$，

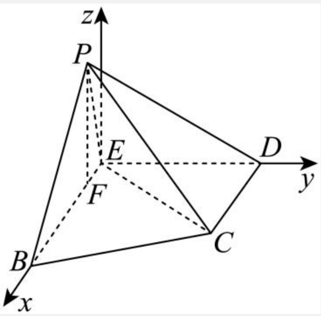
设平面 PBC 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$，

取 $x=\sqrt{3}$，可得 $y=1,z=5$，所以 $\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},1,5)$，

又由 z 轴垂直平面 $EBCD$，可得平面 $EBCD$ 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$，

则 $\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{5}{\sqrt{29}\times1}=\dfrac{5\sqrt{29}}{29}$，

所以二面角 $P-BC-E$ 的大小 $\arccos\dfrac{5\sqrt{29}}{29}$.



二、空间几何体

4.（2023·上海长宁·统考一模）豆腐发酵后表面长出一层白绒绒的长毛就成了毛豆腐，将三角形豆腐 ABC 悬空挂在发酵空间内，记发酵后毛豆腐所构成的几何体为 T.若忽略三角形豆腐 ABC 的厚度，设

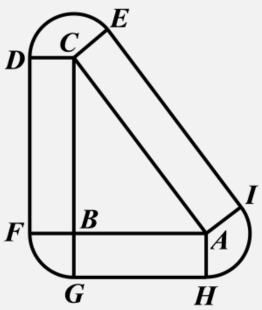
$AB=3,BC=4,AC=5$，点 P 在 $\triangle ABC$ 内部.假设对于任意点 P，满足 $PQ\le 1$ 的点 Q 都在 T 内，且对于 T 内任意一点 Q，都存在点 P，满足 $PQ\le 1$，则 T 的体积为（　）

A．$12+7\pi$　　B．$12+\dfrac{22\pi}{3}$　　C．$14+7\pi$　　D．$14+\dfrac{22\pi}{3}$

【答案】B

【分析】由题意可知：T 是由三个半圆柱，三个球体的一部分和一个直三棱柱构成，根据圆柱、球和棱柱的体积公式分别求得各个部分几何体的体积即可加和得到结果.

【详解】空间中，T 在垂直于平面 ABC 的角度看，如下图所示：



其中：$BCDF$，$ACEI$ 和 $ABGH$ 区域内的几何体为底面半径为1的半圆柱；

CDE，BFG，AHI 区域内的几何体为被两平面所截得的部分球体，球心分别为 C,B,A；

ABC 区域内的几何体是高为2的直三棱柱.

因为四边形 $BCDF$ 和 $ACEI$ 为矩形，则 $\angle DCB=\angle ECA=\dfrac{\pi}{2}$，

可得 $\angle DCE=2\pi-\pi-\angle ACB=\pi-\angle ACB$，

同理可得：$\angle FBG=\pi-\angle ABC$，$\angle HAI=\pi-\angle CAB$，

所以 $\angle DCE+\angle FBG+\angle HAI=3\pi-\left(\angle ACB+\angle ABC+\angle CAB\right)=3\pi-\pi=2\pi$，

可得 CDE，BFG，AHI 区域内的几何体合成一个完整的，半径为1的球，

则 CDE，BFG，AHI 区域内的几何体的体积之和 $V_1=\dfrac{4}{3}\pi\times 1^3=\dfrac{4}{3}\pi$；

又因为 $BCDF$，$ACEI$ 和 $ABGH$ 区域内的几何体的体积之和 $V_2=\dfrac{1}{2}\pi\times 1^2\times\left(3+4+5\right)=6\pi$；

ABC 区域内的直三棱柱体积 $V_3=\dfrac{1}{2}\times 3\times 4\times 2=12$，

所以 T 的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi+6\pi+12=12+\dfrac{22}{3}\pi$.

故选：B.

【点睛】关键点睛：本题考查立体几何中的体积问题，解题关键是能够根据 T 的形状，进而由对应几何体的体积公式求得结果.

5．（2023·上海闵行·统考一模）已知圆锥的底面周长为 4π，母线长为3，则该圆锥的侧面积为________.

【答案】6π

【分析】求出圆锥的底面半径，根据圆锥的侧面积公式，即可求得答案.

【详解】设圆锥的底面半径为r，则由圆锥的底面周长为4π，

可得$2\pi r=4\pi,\therefore r=2$，

而母线长为3，则该圆锥的侧面积为$\pi rl=\pi\times2\times3=6\pi$，

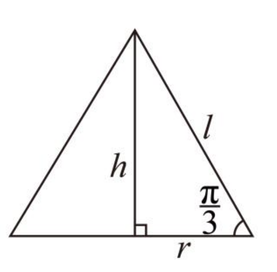
故答案为：6π

6.（2023上·上海浦东新·高三统考期末）已知圆锥的母线与底面所成的角为$\frac{\pi}{3}$，体积为3π，则圆锥的底面半径为___________.

【答案】$\sqrt{3}$

【分析】由题意得到圆锥底面半径与高之间的关系，再根据圆锥的体积公式列方程即可求解.

【详解】圆锥的轴截面图如图所示：



由题意$h=r\cdot\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}r,V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3=3\pi$，解得$r=\sqrt{3}$，即圆锥的底面半径为$\sqrt{3}$.

故答案为：$\sqrt{3}$.

7.（2023·上海崇明·统考一模）已知圆锥的母线与底面所成角为$45°$，高为1，则该圆锥的母线长为__________.

【答案】$\sqrt{2}$

【分析】根据圆锥的结构特征，圆锥底面半径、高、母线长构成一个直角三角形，可根据锐角三角函数进行求解底面圆的半径，再利用勾股定理求解母线.

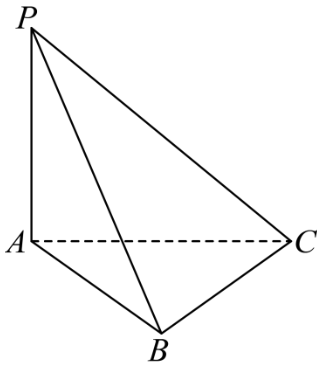
【详解】已知圆锥的母线与底面所成角为$45°$，高为1，

因为圆锥底面半径、高、母线长构成一个直角三角形，

所以底面圆半径为1，所以母线长等于$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{2}$.

8.（2023·上海奉贤·统考一模）在《九章算术》中，将四个面都是直角三角形的四面体称为鳖臑．如图，已知四面体$P-ABC$中，$PA\perp$平面ABC，$PA=BC=1$.



(1)若 $AB=1$，$PC=\sqrt{3}$，求证：四面体 $P-ABC$ 是鳖臑，并求该四面体的体积；

(2)若四面体 $P-ABC$ 是鳖臑，当 $AC=a\left(a>1\right)$ 时，求二面角 $A-BC-P$ 的平面角的大小.

【答案】(1)证明见解析，$V_{P-ABC}=\frac{1}{6}$

(2) $\arctan\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-1}$ 或 $\arctan\frac{1}{a}$

【分析】(1）借助线面垂直证明面面垂直，结合题目所给长度，运用勾股定理证明四面全为直角三角形即可，体积借助体积公式计算即可得；

（2）根据题意，会出现两种情况，即 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$ 或 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，分类讨论计算即可得.

【详解】(1）$\because PA\perp$ 平面 ABC，AB、$AC\subset$ 平面 ABC，

$\therefore PA\perp AB$、$PA\perp AC$，

$\therefore \triangle PAC$、$\triangle PAB$ 为直角三角形，

$\therefore$ 在直角 $\triangle PAC$ 中，$|AC|=\sqrt{|PC|^2-|PA|^2}=\sqrt{2}$，

在直角 $\triangle PAB$ 中，$|PB|=\sqrt{PA^2+PB^2}=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中，有 $|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2$，

$\therefore AB\perp BC$，故 $\triangle ABC$ 为直角三角形，

在 $\triangle$PBC 中，有 $|PC|^2=|PB|^2+|BC|^2$，

故 $PB\perp BC$，故 $\triangle$PBC 为直角三角形，

故四面体 $P-ABC$ 四个面都是直角三角形，即四面体 $P-ABC$ 是鳖臑，

$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot|PA|=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$；

（2）$\because PA\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，

$\therefore PA\perp BC$，

由 $AC=a>1=AB$，

故$\angle BAC$不可能是直角，

若$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，则有$AB\perp BC$，

又$PA\perp BC$，PA、$AB\subset$平面PAB，$PA\cap AB=A$，

故$BC\perp$平面PAB，又$PB\subset$平面PAB，

故$BC\perp PB$，

$\therefore\angle ABP$是二面角$A-BC-P$的平面角，

Q $AC=a$，$BC=1$，$\therefore AB=\sqrt{a^2-1}$，$\therefore\tan\angle PBA=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$，

所以二面角$A-BC-P$的平面角的大小为$\arctan\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-1}$.

若$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，

同理可得$\angle ACP$是二面角$A-BC-P$的平面角，

所以$\tan\angle ACP=\frac{AP}{AC}=\frac{1}{a}$，

所以二面角的平面角的大小为$\arctan\frac{1}{a}$，

综上所述，二面角$A-BC-P$的平面角的大小为$\arctan\frac{\sqrt{a^2-1}}{a^2-1}$或$\arctan\frac{1}{a}$.

9.（2023·上海嘉定·统考一模）中国历史悠久，积累了许多房屋建筑的经验．房梁为柱体，或取整根树干而制为圆柱形状，或作适当裁减而制为长方体形状，例如下图所示．

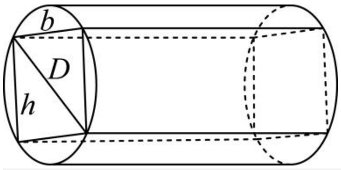
材质确定的梁的承重能力取决于截面形状，现代工程科学常用抗弯截面系数W来刻画梁的承重能力．对于两个截面积相同的梁，称W较大的梁的截面形状更好．三种不同截面形状的梁的抗弯截面系数公式，如下表所列，

	圆形截面	正方形截面	矩形截面
条件	r为圆半径	a为正方形边长	h为矩形的长，b为矩形的宽，$h>b$
抗弯截面系数	$W_1=\frac{\pi}{4}r^3$	$W_2=\frac{1}{6}a^3$	$W_3=\frac{1}{6}bh^2$

(1)假设上表中的三种梁的截面面积相等，请问哪一种梁的截面形状最好？并具体说明；

(2)宋朝学者李诫在《营造法式》中提出了矩形截面的梁的截面长宽之比应定为$3:2$的观点．考虑梁取材于

圆柱形的树木，设矩形截面的外接圆的直径为常数 D，如下图所示，请问 $h:b$ 为何值时，其抗弯截面系数取得最大值，并据此分析李诚的观点是否合理.



【答案】(1)矩形截面的梁的截面形状最好.

(2)答案见解析

【分析】(1) 根据题意，得到 $W_1=\frac{S\sqrt{S}}{4\sqrt{\pi}}$，$W_2=\frac{S\sqrt{S}}{6}$，$W_3=\frac{S}{6}h$，结合题意，得到 $W_3>W_2>W_1$，得到结论；

(2) 根据题意，得到 $W_3=\frac{-b^3+D^2b}{6}(b>0)$，得到 $W_3'=\frac{-b^2+D^2}{6}$，求得函数的单调性，求得 $b=\frac{D}{\sqrt{3}}$ 时，W_3 取得最大值，进而得到结论.

【详解】(1) 解：假设截面面积均为正常数 s，

可得 $W_1=\frac{\pi}{4}r^3=\frac{S}{4}r=\frac{S}{4}\sqrt{\frac{S}{\pi}}=\frac{S\sqrt{S}}{4\sqrt{\pi}}$，$W_2=\frac{1}{6}a^3=\frac{S}{6}a=\frac{S\sqrt{S}}{6}$，$W_3=\frac{1}{6}bh^2=\frac{S}{6}h$，

所以 $W_3=\frac{S}{6}\sqrt{h^2}>\frac{S}{6}\sqrt{bh}=\frac{S\sqrt{S}}{6}=W_2$，

又因为 $3<\pi$，所以 $6<4\sqrt{\pi}$，所以 $W_2>W_1$，

综上，$W_3>W_2>W_1$，于是矩形截面的梁的截面形状最好.

(2) 解：由 $W_3=\frac{1}{6}bh^2=\frac{1}{6}b(D^2-b^2)=\frac{-b^3+D^2b}{6}(b>0)$，

可得 $W_3'=\frac{-3b^2+D^2}{6}$，

可得

b	$b<\frac{D}{\sqrt{3}}$	$b=\frac{D}{\sqrt{3}}$	$b>\frac{D}{\sqrt{3}}$
W_3'	$W_3'>0$	$W_3'=0$	$W_3'<0$
W_3	↗	极大值	↘

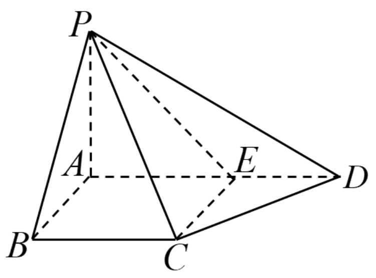
所以，当 $b=\frac{D}{\sqrt{3}}$ 时，W_3 取得最大值，

此时，当 $b=\frac{D}{\sqrt{3}}$，于是 $h:b=\sqrt{2}:1\approx 2.83:2$，

因为$h:b=3:2$的结论与抗弯系数理论的结论不同，但比较接近，是合理的，应肯定李诚从实践总总结的经验的实用价值，

考虑到所处的时代，从历史辩证的角度，其观点代表了我国古代在工程技术方面已经达到了较高的水平.

10．（2023上·上海松江·高三统考期末）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$AB\perp AD$，点E在线段AD上，且$CE//AB$.



(1)求证：$CE\perp$平面PAD；

(2)若四棱锥$P-ABCD$的体积为$\frac{5}{6}$，$AB=1$，$AD=3$，$CD=\sqrt{2}$，$\angle CDA=45^{\circ}$，求二面角$P-CE-A$的大小.

【答案】(1)证明见解析

(2)$\arctan\frac{1}{2}$

【分析】（1）利用线面垂直的性质、判定推理即得.

（2）由（1）的信息确定二面角的平面角，利用锥体体积公式求出PA，再在直角三角形中求出解即可.

【详解】（1）由$PA\perp$底面$ABCD$，$CE\subset$平面$ABCD$，得$PA\perp CE$，

由$AB\perp AD,CE//AB$，得$CE\perp AD$，而$PA\cap AD=A,PA,AD\subset$平面PAD，

所以$CE\perp$平面PAD.

（2）由（1）知，$CE\perp$平面PAD，而$PE\subset$平面PAD，则$CE\perp PE$，又$CE\perp AE$，

因此$\angle PEA$是二面角$P-CE-A$的平面角，

在$\text{Rt}\triangle ECD$中，$DE=CD\cos45^{\circ}=1,CE=CD\sin45^{\circ}=1$，

显然$CE=AB=1,AB//CE$，四边形$ABCE$为矩形，于是$BC=AE=2$，

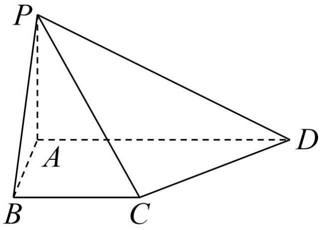
而四棱锥$P-ABCD$的体积$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot PA=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(2+3)\times1\cdot PA=\frac{5}{6}$，解得$PA=1$，

在$\text{Rt}\triangle PAE$中，$\tan\angle PEA=\frac{PA}{AE}=\frac{1}{2}$，因此$\angle PEA=\arctan\frac{1}{2}$，

所以二面角$P-CE-A$的大小为$\arctan\frac{1}{2}$.

三、空间向量与立体几何

11．（2023上·上海奉贤·高三校考期中）如图，已知四棱锥$P-ABCD$的底面$ABCD$是直角梯形，$AD//BC$，$AD=4$，$\angle ABC=90^\circ$，$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AB=BC=2$，下列说法正确的是（　　）



A．PB与CD所成的角是30°

B．平面PCD与平面PBA所成的锐二面角余弦值是$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

C．PB与平面PCD所成的角的正弦值是$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

D．M是线段PC上动点，N为AD中点，则点P到平面BMN距离最大值为$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

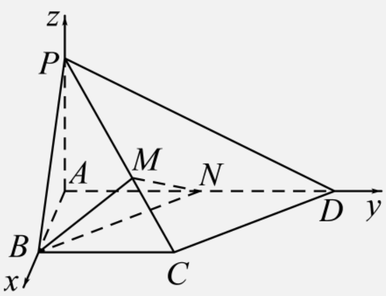
【答案】C

【分析】根据题设建立空间直角坐标系，利用空间向量解决线线角、线面角、面面角以及点到面的距离问题.

【详解】$\because$ $\angle ABC=90^\circ$，$AD//BC$，$\therefore$ $AB\perp AD$，

$\because$ $PA\perp$平面$ABCD$，

$\therefore$ 以A为原点，AB，AD，AP所在的直线分别为x轴、y轴、z轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,4,0)$，$P(0,0,2)$，

$\therefore$ $\overrightarrow{BP}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{CD}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$，

对于A，$\because$ $\cos\left\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{CD}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{BP}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

且$0^\circ\le\left\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{CD}\right\rangle\le180^\circ$，$\therefore$ $\left\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{CD}\right\rangle=60^\circ$，

$\therefore$ PB与CD所成的角是60°，故A错误；

对于B，设平面PCD的法向量为$\overrightarrow{n_1}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PC}=2x_1+2y_1-2z_1=0,\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CD}=-2x_1+2y_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，则 $y_1=1$， $z_1=2$， 所以 $\overrightarrow{n_1}=(1,1,2)$，

显然平面 PAB 的法向量为 $\vec{m}=(0,1,0)$，

$\therefore\ \cos\left\langle\vec{m},\overrightarrow{n_1}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{n_1}}{|\vec{m}||\overrightarrow{n_1}|}=\dfrac{1}{1\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，

$\therefore$ 平面 PCD 与平面 PBA 所成的锐二面角余弦值是 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，故 B 错误.

对于 C，$\sin\left\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{n_1}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{n_1}}{|\overrightarrow{BP}||\overrightarrow{n_1}|}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，故 C 正确；

对于 D，$\because$ M 是线段 PC 上动点，$\therefore$ 设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}=(2\lambda,2\lambda,-2\lambda)(0\le\lambda\le1)$，

$\because$ N 为 AD 中点，$\therefore$ $N(0,2,0)$，$\overrightarrow{BN}=(-2,2,0)$，

$\therefore$ $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PM}=(-2+2\lambda,2\lambda,2-2\lambda)$，

当 $\lambda=1$ 时，M 位于 C 点，此时点 P 到平面 BMN 距离为 $|PA|=2$，

当 $\lambda\ne1$ 时，设平面 BMN 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BM}=(-2+2\lambda)x_2+2\lambda y_2+(2-2\lambda)z_2=0,\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{BN}=-2x_2+2y_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=1$，则 $y_2=1$， $z_2=\dfrac{1-2\lambda}{1-\lambda}$， 所以 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,\dfrac{1-2\lambda}{1-\lambda})$，

$\therefore$ 点 P 到平面 BMN 距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\left|-2+2\cdot\dfrac{1-2\lambda}{1-\lambda}\right|}{\sqrt{1+1+\left(\dfrac{1-2\lambda}{1-\lambda}\right)^2}}=\frac{|2\lambda|}{\sqrt{2(1-\lambda)^2+(1-2\lambda)^2}}=\frac{2}{\sqrt{3\cdot\dfrac{1}{\lambda^2}-8\dfrac{1}{\lambda}+6}},$$

当 $\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{4}{3}$，即 $\lambda=\dfrac{3}{4}$ 时，$\left(3\cdot\dfrac{1}{\lambda^2}-8\dfrac{1}{\lambda}+6\right)_{\min}=\dfrac{2}{3}$，

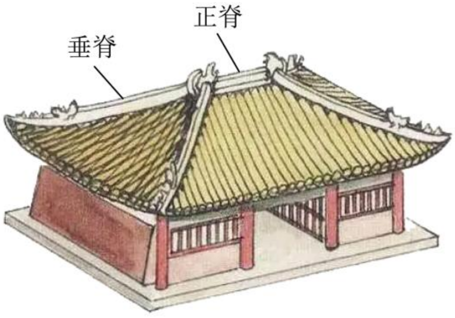
此时 $d_{\max}=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{2}{3}}}=\sqrt{6}$，$\because$ $\sqrt{6}>2$，

$\therefore$ 点 P 到平面 BMN 距离的最大值为 $\sqrt{6}$，故 D 错误.

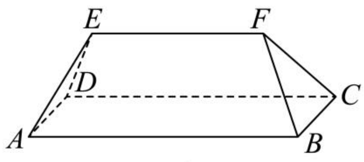
故选：C.

12．（2023 上·上海·高三上海市进才中学校考期中）庑殿式屋顶是中国古代建筑中等级最高的屋顶形式，

分为单檐庑殿顶与重檐庑殿顶．单檐庑殿顶主要有一条正脊和四条垂脊，前后左右都有斜坡（如图①），类似五面体 $FE-ABCD$ 的形状（如图②），若四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB//EF$，且 $AB=CD=2EF=2BC=8$，$EA=ED=FB=FC=3$，则五面体 $FE-ABCD$ 的表面积为________．



①

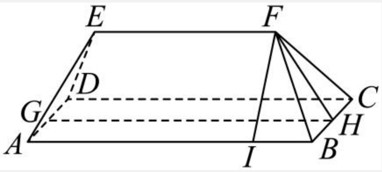


②

【答案】$32+16\sqrt{5}$/$16\sqrt{5}+32$

【分析】根据平面图形的几何性质，分别求等腰三角形和梯形的高，再求各个面的面积，即可求总面积.

【详解】分别取 AD，BC 的中点 G，H，连接 GH，FH，



过点 F 作 AB 的垂线 FI，垂足为 I，

因为 $FB=FC=3$，$BC=4$,所以 $FH\perp BC$，所以 $FH=\sqrt{5}$，

根据对称性易得 $\triangle FBC\cong\triangle EAD$，

所以 $S_{\triangle FBC}=\frac{1}{2}BC\times FH=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle FBI$ 中，$BI=\frac{8-4}{2}=2$，所以 $FI=\sqrt{FB^2-BI^2}=\sqrt{5}$，

$S_{梯形FEAB}=\frac{1}{2}(EF+AB)\times FI=\frac{1}{2}\times(4+8)\times\sqrt{5}=6\sqrt{5}$，

又 $S_{矩形ABCD}=AB\times BC=32$，

所以 $S_{FE-ABCD}=2S_{\triangle FBC}+2S_{梯形FEAB}+S_{矩形ABCD}=32+16\sqrt{5}$.

故答案为：$32+16\sqrt{5}$.

13．（2023·上海奉贤·统考一模）在四面体 $P-ABC$ 中，若底面 ABC 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,1,0)$，且 $\overrightarrow{CP}=(2,2,-1)$，则顶点 P 到底面 ABC 的距离为____________．

【答案】$2\sqrt{2}$

【分析】根据点面距公式代入计算即可得.

【详解】由点面距公式得 $d=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{CP}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|2+2\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

故答案为：$2\sqrt{2}$.

14．（2023·上海崇明·统考一模）在空间直角坐标系中，点 $P(1,-2,3)$ 到 xOy 平面的距离为__________.

【答案】3

【分析】根据空间直角坐标系的定义和点的坐标得到答案.

【详解】在空间直角坐标系中，点 $P(1,-2,3)$ 到 xOy 平面的距离为竖坐标的绝对值，即为 3.

故答案为：3

15．（2023·上海长宁·统考一模）若向量 $\vec{a}=\left(1,0,2\right)$，$\vec{b}=\left(0,1,-1\right)$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量的坐标为______.

【答案】$\left(0,-1,1\right)$

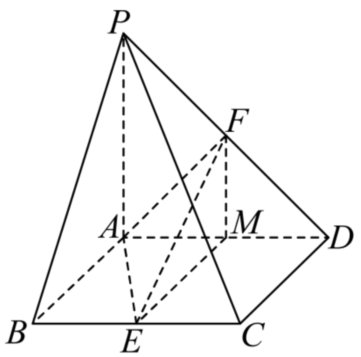
【分析】根据给定条件，利用投影向量的意义求解即得.

【详解】向量 $\vec{a}=\left(1,0,2\right)$，$\vec{b}=\left(0,1,-1\right)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2,|\vec{b}|=\sqrt{2}$，

所以 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=-\vec{b}=(0,-1,1)$.

故答案为：$\left(0,-1,1\right)$

16．（2023上·上海嘉定·高三上海市嘉定区第一中学校考期中）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$PA=2$，$PA\perp AB$，E 为 BC 的中点，F 为 PD 上一点，$EF//$ 平面 PAB.



(1)求证：F 为 PD 的中点；

(2)若 $AD\perp PB$，求直线 AD 与平面 AEF 所成角的正弦值.

【答案】(1)证明见详解；

(2)$\dfrac{2}{3}$

【分析】（1）取 AD 的中点 M，可证明 面EMF // 面PAB，得到 $MF//PA$ 即可.

（2）建系，利用空间向量法直接求线面角的正弦值.

【详解】（1）证明：取 AD 的中点 M，

因为 E 为 BC 的中点，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，

所以 $EM//AB$，又因为 $EM\not\subset$ 面PAB，所以 $EM//$ 平面 PAB，

因为 $EM\not\subset$ 面PAB, $EM\cap EF=E$, $EM,EF\subset$ 面EMF，$EF//$ 平面 PAB

所以 面EMF // 面PAB

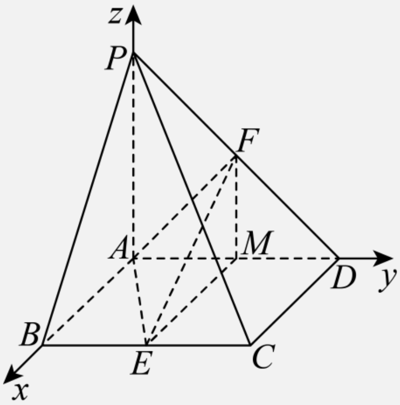
因为 面$EFM\cap$面$PAD=FM$, 面$PAD\cap$面$PAB=PA$，

所以 $MF//PA$，

因为 M 为 AD 中点，

所以 F 为 PD 的中点

（2）



因为 $AB\perp AD$，又 $AD\perp PB$，$AB\cap PB=B$

所以 $AD\perp$ 面PAB，所以 $AD\perp PA$，

因为 $PA\perp AB$，$AD\perp PB$，$AB\perp AD$

故以 A 为坐标原点，分别以 AB,AD,AP 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0)$, $D(0,2,0)$, $E(2,1,0)$, $F(0,1,1)$

所以 $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$, $\overrightarrow{AE}=(2,1,0)$, $\overrightarrow{AF}=(0,1,1)$

设平面 AEF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

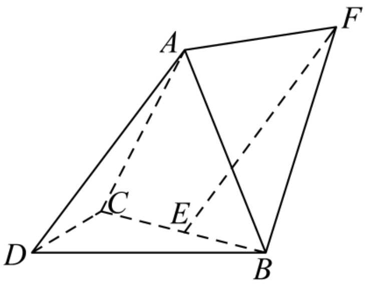
则 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\vec{n}=2x+y=0\\ \overrightarrow{AF}\cdot\vec{n}=z+y=0\end{cases}$，另 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,-2,2)$

设直线 AD 与平面 AEF 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AD},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2}{3}$

所以直线 AD 与平面 AEF 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$

17．（2023上·上海虹口·高三校考期中）如图，三棱锥 $A-BCD$ 中， $DA=DB=DC=2$， $BD\perp CD$，$\angle ADB=\angle ADC=60°$，$E$ 为 BC 的中点．



(1)证明： $BC\perp DA$；

(2)点 F 满足 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求平面 DAB 和平面 FAB 所成的锐二面角．

【答案】(1)证明见解析；

(2) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$．

【分析】（1）连接 DE,AE， 由题设易得 $DE\perp BC$、$\triangle ADC\cong\triangle ADB$， 进而有 $AE\perp BC$，再根据线面垂直的判定和性质证结论；

（2）由题设易知 $ADEF$ 是平行四边形，并证 $AE\perp DE$，构建空间直角坐标系，应用向量法求面面角的大小．

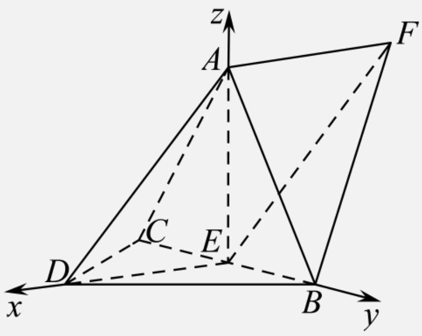
【详解】（1）连接 DE,AE， 由 $DB=DC$， E 为 BC 的中点， 故 $DE\perp BC$，

由 $DA=DB=DC$， $\angle ADB=\angle ADC=60°$， 易知 $\triangle ADC\cong\triangle ADB$，

所以 $AC=AB$， E 为 BC 的中点， 则 $AE\perp BC$，

又 $DE\cap AE=E$， $DE,AE\subset$ 面 ADE， 故 $BC\perp$ 面 ADE，

由 $DA\subset$ 面 ADE， 故 $BC\perp DA$．



（2）由 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$， 即 $EF//AD,EF=AD$， 故 $ADEF$ 是平行四边形，

由（1）及题设易知 $AC=AB=2$， $BC=2\sqrt{2}$， 则 $AE=DE=\sqrt{2}$，

所以$AE^2+DE^2=AD^2$，故$AE\perp DE$，又$BC\perp$面ADE，

可构建空间直角坐标系$E-xyz$，则$A(0,0,\sqrt{2}),B(0,\sqrt{2},0),D(\sqrt{2},0,0),F(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，

所以$\overrightarrow{AD}=(\sqrt{2},0,-\sqrt{2}),\overrightarrow{AB}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2}),\overrightarrow{AF}=(-\sqrt{2},0,0)$，

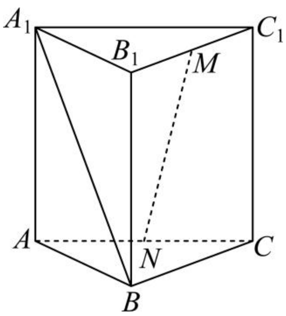
若$\vec{m}=(x,y,z)$为面DAB的一个法向量，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{2}x-\sqrt{2}z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{2}y-\sqrt{2}z=0\end{cases}$，令$z=1$，则$\vec{m}=(1,1,1)$；

若$\vec{n}=(a,b,c)$为面FAB的一个法向量，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=-\sqrt{2}a=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{2}b-\sqrt{2}c=0\end{cases}$，令$c=1$，则$\vec{n}=(0,1,1)$；

所以平面DAB和平面FAB所成角余弦值$|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}|=\frac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

故平面DAB和平面FAB所成的锐二面角为$\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

18．（2023上·上海·高三上海市行知中学校考期中）如图，正直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$BC=AB=AA_1$，$\angle ABC=90°$，M是B_1C_1的中点，N是AC的中点.



(1)判断直线MN与直线BC的位置关系并证明；

(2)求直线A_1B与平面BCC_1B_1所成的角的大小.

【答案】(1)直线MN与直线BC异面且相互垂直，证明见解析；

(2)$\frac{\pi}{4}$.

【分析】（1）构建空间直角坐标系，应用向量法证明$\overrightarrow{BC},\overrightarrow{MN}$的位置关系即可；

（2）应用向量法求线面角的大小.

【详解】（1）直线MN与直线BC的异面且相互垂直，证明如下：

由$BC\subset$面ABC，$N\notin BC$，$N\in$面ABC，$M\notin$面ABC，即直线MN与直线BC的异面；

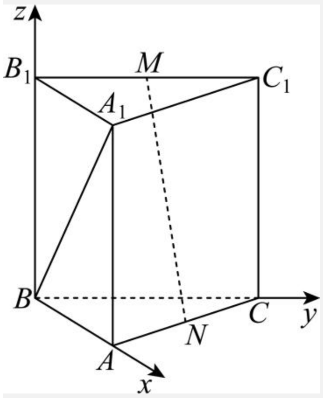
正直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ABC=90°$，则$BB_1\perp$面ABC，且$AB\perp BC$，

可构建如下图示空间直角坐标系$B-xyz$，令$BC=AB=AA_1=2$，

则 $B(0,0,0),C(0,2,0),M(0,1,2),N(1,1,0)$，即 $\overrightarrow{BC}=(0,2,0),\overrightarrow{MN}=(1,0,-2)$，

所以 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{MN}=0$，即直线 MN 与直线 BC 相互垂直.

综上，直线 MN 与直线 BC 异面且相互垂直



（2）由（1）知：面 BCC_1B_1 的一个法向量 $\vec{m}=(1,0,0)$，$B(0,0,0),A_1(2,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{BA_1}=(2,0,2)$，则 $|\cos\langle\vec{m},\overrightarrow{BA_1}\rangle|=|\frac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}}{|\vec{m}||\overrightarrow{BA_1}|}|=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故直线 A_1B 与平面 BCC_1B_1 所成角余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，又线面角的范围为 $[0,\frac{\pi}{2}]$，

所以直线 A_1B 与平面 BCC_1B_1 所成角大小为 $\frac{\pi}{4}$.