导数（三大类型题）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、导数的概念及几何意义

1．（2023·上海青浦·统考一模）若函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=x_0$ 处的导数等于 a，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0-\Delta x\right)}{\Delta x}$ 的值为（　）．

A．0　　B．a　　C．$2a$　　D．$3a$

2．（2023·上海青浦·统考一模）已知有穷等差数列 $\{a_n\}:a_1,a_2,\cdots,a_m(m\geq 3,m\in\mathrm{N}^*)$ 的公差 d 大于零．

(1)证明：$\{a_n\}$ 不是等比数列；

(2)是否存在指数函数 $y=f(x)$ 满足：$y=f(x)$ 在 $x=a_1$ 处的切线的交 x 轴于 $(a_2,0)$，$y=f(x)$ 在 $x=a_2$ 处的切线的交 x 轴于 $(a_3,0)$，…，$y=f(x)$ 在 $x=a_{m-1}$ 处的切线的交 x 轴于 $(a_m,0)$？若存在，请写出函数 $y=f(x)$ 的表达式，并说明理由；若不存在，也请说明理由；

(3)若数列 $\{a_n\}$ 中所有项按照某种顺序排列后可以构成等比数列 $\{b_n\}$，求出所有可能的 m 的取值．

二、导数在研究函数中的作用

3．（2023·上海闵行·统考一模）已知函数 $y=f\left(x\right)$ 的导函数为 $y=f'\left(x\right)$，$x\in\mathbf{R}$，且 $y=f'\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为严格增函数，关于下列两个命题的判断，说法正确的是（　）

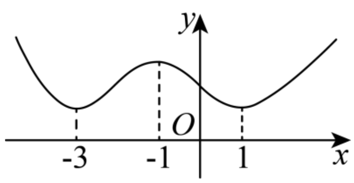
①“$x_1>x_2$”是“$f\left(x_1+1\right)+f\left(x_2\right)>f\left(x_1\right)+f\left(x_2+1\right)$”的充要条件；

②“对任意 $x<0$ 都有 $f\left(x\right)<f\left(0\right)$”是“$y=f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为严格增函数”的充要条件．

A．①真命题；②假命题　　B．①假命题；②真命题

C．①真命题；②真命题　　D．①假命题；②假命题

4．（2023上·上海松江·高三统考期末）函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象如图所示，$y=f'\left(x\right)$ 为函数 $y=f\left(x\right)$ 的导函数，则不等式 $\dfrac{f'\left(x\right)}{x}<0$ 的解集为（　）



A．$(-3,-1)$　　B．$(0,1)$

C．$(-3,-1)\cup(0,1)$　　D．$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

5．（2023·上海青浦·统考一模）已知三个互不相同的实数a、b、c满足$a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=3$，则abc的取值范围为____________.

6．（2023·上海金山·统考一模）设函数$y=f(x)$的定义域为D，给定区间$[a,b]\subseteq D$，若存在$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则称函数$y=f(x)$为区间$[a,b]$上的“均值函数”，$x_0$为函数$y=f(x)$的“均值点”.

(1)试判断函数$y=x^2$是否为区间$[1,2]$上的“均值函数”，如果是，请求出其“均值点”；如果不是，请说明理由；

(2)已知函数$y=-2^{2x-1}+m\cdot 2^{x-1}-12$是区间$[1,3]$上的“均值函数”，求实数$m$的取值范围；

(3)若函数$y=\dfrac{x^2+a}{2(x^2-2x+2)}$（常数$a\in\mathbf{R}$）是区间$[-2,2]$上的“均值函数”，且$\dfrac{2}{3}$为其“均值点”．将区间$[-2,0]$任意划分成$m+1$（$m\in\mathrm{N}$）份，设分点的横坐标从小到大依次为$t_1,t_2,\cdots,t_m$，记$t_0=-2$，$t_{m+1}=0$，$G=\sum\limits_{i=0}^{m}|f(t_{i+1})-f(t_i)|$．再将区间$[0,2]$等分成$2^n+1$（$n\in\mathbf{N}$）份，设等分点的横坐标从小到大依次为$x_1,x_2,\cdots,x_{2^n}$，记$H=\sum\limits_{i=1}^{2^n}f(x_i)$．求使得$H\cdot G>2023$的最小整数$n$的值.

7．（2023·上海徐汇·统考一模）若函数$y=f(x),x\in\mathbf{R}$的导函数$y=f'(x),x\in\mathbf{R}$是以$T(T\neq 0)$为周期的函数，则称函数$y=f(x),x\in\mathbf{R}$具有“T性质”.

(1)试判断函数$y=x^2$和$y=\sin x$是否具有“2π性质”，并说明理由；

(2)已知函数$y=h(x)$，其中$h(x)=ax^2+bx+2\sin bx(0<b<3)$具有“$\pi$性质”，求函数$y=h(x)$在$[0,\pi]$上的极小值点；

(3)若函数$y=f(x),x\in\mathbf{R}$具有“T性质”，且存在实数$M>0$使得对任意$x\in\mathbf{R}$都有$|f(x)|<M$成立，求证：$y=f(x),x\in\mathbf{R}$为周期函数.

（可用结论：若函数$y=f(x),x\in\mathbf{R}$的导函数满足$f'(x)=0,x\in\mathbf{R}$，则$f(x)=C$（常数）.）

8．（2023上·上海浦东新·高三统考期末）设 $y=f\left(x\right)$ 是定义在R上的函数，若存在区间 $\left[a,b\right]$ 和 $x_0\in(a,b)$，使得 $y=f\left(x\right)$ 在 $[a,x_0]$ 上严格减，在 $[x_0,b]$ 上严格增，则称 $y=f\left(x\right)$ 为“含谷函数”，x_0 为“谷点”，$\left[a,b\right]$ 称为 $y=f\left(x\right)$ 的一个“含谷区间”.

(1)判断下列函数中，哪些是含谷函数？若是，请指出谷点；若不是，请说明理由：

（i）$y=2|x|$，（ii）$y=x+\cos x$；

(2)已知实数 $m>0$，$y=x^2-2x-m\ln\left(x-1\right)$ 是含谷函数，且 $\left[2,4\right]$ 是它的一个含谷区间，求 m 的取值范围；

(3)设 $p,q\in\mathrm{R}$，$h\left(x\right)=-x^4+px^3+qx^2+\left(4-3p-2q\right)x$．设函数 $y=h\left(x\right)$ 是含谷函数，$\left[a,b\right]$ 是它的一个含谷区间，并记 $b-a$ 的最大值为 $L\left(p,q\right)$．若 $h\left(1\right)\le h\left(2\right)$，且 $h\left(1\right)\le 0$，求 $L\left(p,q\right)$ 的最小值．

9．（2023上·上海·高三上海市七宝中学校联考阶段练习）已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-x$，$g\left(x\right)=\mathrm{e}^{-x}+x$，其中e为自然对数的底数，设函数 $F\left(x\right)=af\left(x\right)-g\left(x\right)$，

(1)若 $a=\mathrm{e}$，求函数 $y=F\left(x\right)$ 的单调区间，并写出函数 $y=F\left(x\right)-m$ 有三个零点时实数 m 的取值范围；

(2)当 $0<a<1$ 时，x_1、x_2 分别为函数 $y=F\left(x\right)$ 的极大值点和极小值点，且不等式 $F\left(x_1\right)+tF\left(x_2\right)>0$ 对任意 $a\in\left(0,1\right)$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

(3)对于函数 $y=f\left(x\right)$，若实数 x_0 满足 $f\left(x_0\right)f\left(x_0+F\right)=D$，其中 F、D 为非零实数，则 x_0 称为函数 $f\left(x\right)$ 的“$F-D-$笃志点”.

①已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, x>0\\ \dfrac{1}{x+a}, x<0\end{cases}$，且函数 $f\left(x\right)$ 有且只有3个“$1-1-$笃志点”，求实数 a 的取值范围；

②定义在R上的函数 $f\left(x\right)$ 满足：存在唯一实数 m，对任意的实数 x，使得 $f\left(m+x\right)=f\left(m-x\right)$ 恒成立或 $f\left(m+x\right)=-f\left(m-x\right)$ 恒成立.对于有序实数对 $\left(F,D\right)$，讨论函数 $f\left(x\right)$“$F-D-$笃志点”个数的奇偶性，并说明理由

10．（2023·上海长宁·统考一模）若函数 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=g\left(x\right)$ 满足：对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，都有 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\ge\left|g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right|$，则称函数 $y=f\left(x\right)$ 是函数 $y=g\left(x\right)$ 的“约束函数”.已知函数 $y=f\left(x\right)$ 是函

数 $y=g\left(x\right)$ 的“约束函数”.

(1)若 $f\left(x\right)=x^{2}$，判断函数 $y=g\left(x\right)$ 的奇偶性，并说明理由；

(2)若 $f\left(x\right)=ax+x^{3}(a>0),g\left(x\right)=\sin x$，求实数 a 的取值范围；

(3)若 $y=g\left(x\right)$ 为严格减函数，$f(0)<f(1)$，且函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像是连续曲线，求证：$y=f\left(x\right)$ 是 $\left(0,1\right)$ 上的严格增函数.

11．（2023·上海普陀·统考一模）设函数 $y=f\left(x\right)$ 的表达式为 $f\left(x\right)=a\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$.

(1)求证：“$a=1$”是“函数 $y=f\left(x\right)$ 为偶函数”的充要条件；

(2)若 $a=1$，且 $f\left(m+2\right)\le f\left(2m-3\right)$，求实数 m 的取值范围.

12．（2023·上海崇明·统考一模）已知 $f(x)=mx+\sin x\ (m\in \mathrm{R},m\neq 0)$.

(1)若函数 $y=f(x)$ 是实数集 R 上的严格增函数，求实数 m 的取值范围；

(2)已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列（公差 $d\neq 0$），$b_n=f(a_n)$．是否存在数列 $\{a_n\}$ 使得数列 $\{b_n\}$ 是等差数列？若存在，请写出一个满足条件的数列 $\{a_n\}$，并证明此时的数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；若不存在，请说明理由；

(3)若 $m=1$，是否存在直线 $y=kx+b$ 满足：①对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\ge kx+b$ 成立，

②存在 $x_0\in\mathbf{R}$ 使得 $f(x_0)=kx_0+b$？若存在，请求出满足条件的直线方程；若不存在，请说明理由.

13．（2023·上海普陀·统考一模）若存在常数 t，使得数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_{n+1}-a_1a_2a_3\cdots a_n=t$ （$n\ge 1$，$n\in\mathbf{N}$），则称数列 $\left\{a_n\right\}$ 为“$H\left(t\right)$ 数列”.

(1)判断数列：1，2，3，8，49 是否为“$H\left(1\right)$ 数列”，并说明理由；

(2)若数列 $\left\{a_n\right\}$ 是首项为 2 的“$H\left(t\right)$ 数列”，数列 $\left\{b_n\right\}$ 是等比数列，且 $\left\{a_n\right\}$ 与 $\left\{b_n\right\}$ 满足

$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=a_1a_2a_3\cdots a_n+\log_2 b_n$，求 t 的值和数列 $\left\{b_n\right\}$ 的通项公式；

(3)若数列 $\left\{a_n\right\}$ 是“$H\left(t\right)$ 数列”，S_n 为数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和，$a_1>1$，$t>0$，试比较 $\ln a_n$ 与 a_n-1 的大小，并证明 $t>S_{n+1}-S_n-\mathrm{e}^{S_n-n}$.

三、导数的综合应用

14．（2023·上海崇明·统考一模）若存在实数 a,b，对任意实数 $x\in[0,1]$，使得不等式 $x^3-m\leqslant ax+b\leqslant x^3+m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是（　　）

A．$\left[\dfrac{\sqrt{3}}{9},+\infty\right)$　　B．$\left[\dfrac{8\sqrt{3}}{9},+\infty\right)$　　C．$\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$　　D．$\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$

15．（2023·上海普陀·统考一模）设函数 $f\left(x\right)=a\mathrm{e}^{x}-2x^{2}$，若对任意 $x_0\in\left(0,1\right)$，皆有

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)-x+x_0}{x-x_0}>0$ 成立，则实数 a 的取值范围是______.

16．（2023·上海杨浦·统考一模）设函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)求方程 $\left(f\left(x\right)\right)^{2}=f\left(x\right)+2$ 的实数解；

(2)若不等式 $x+b\le f\left(x\right)$ 对于一切 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，求实数 b 的取值范围.

17．（2023·上海嘉定·统考一模）已知 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}},g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

(1)求函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 的单调区间和极值；

(2)请严格证明曲线 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 有唯一交点；

(3)对于常数 $a\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$，若直线 $y=a$ 和曲线 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 共有三个不同交点 $\left(x_1,a\right)$、$\left(x_2,a\right)$、$\left(x_3,a\right)$，其中 $x_1<x_2<x_3$，求证：x_1、x_2、x_3 成等比数列.

18．（2023·上海宝山·统考一模）已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x$，$g\left(x\right)=\mathrm{e}^{-x}+x$，其中 e 为自然对数的底数.

(1)求函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

(2)设函数 $F\left(x\right)=af\left(x\right)-g\left(x\right)$，

①若 $a=\mathrm{e}$，求函数 $y=F\left(x\right)$ 的单调区间，并写出函数 $y=F\left(x\right)-m$ 有三个零点时实数 m 的取值范围；

②当 $0<a<1$ 时，x_1、x_2 分别为函数 $y=F\left(x\right)$ 的极大值点和极小值点，且不等式 $F\left(x_1\right)+tF\left(x_2\right)>0$ 对任意 $a\in\left(0,1\right)$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

19．（2023·上海闵行·统考一模）已知 $a\in\mathbf{R}$，$f\left(x\right)=\left(a-2\right)x^{3}-x^{2}+5x+\left(1-a\right)\ln x$.

(1)若1为函数 $y=f\left(x\right)$ 的驻点，求实数 a 的值；

(2)若 $a=0$，试问曲线 $y=f\left(x\right)$ 是否存在切线与直线 $x-y-1=0$ 互相垂直？说明理由；

(3)若 $a=2$，是否存在等差数列 x_1、x_2、$x_3\left(0<x_1<x_2<x_3\right)$，使得曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)$ 处的切线与过两点 $\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$、$\left(x_3,f\left(x_3\right)\right)$ 的直线互相平行？若存在，求出所有满足条件的等差数列；若不存在，说明理由.

20．（2023上·上海虹口·高三统考期末）已知 $y=f\left(x\right)$ 与 $y=g\left(x\right)$ 都是定义在 $\left(0,+\infty\right)$ 上的函数，若对任意 x_1，

$x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $g(x_1)\le\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\le g(x_2)$，则称 $y=g(x)$ 是 $y=f(x)$ 的一个“控制函数”.

(1)判断 $y=2x$ 是否为函数 $y=x^2(x>0)$ 的一个控制函数，并说明理由；

(2)设 $f(x)=\ln x$ 的导数为 $f'(x)$，$0<a<b$，求证：关于 x 的方程 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x)$ 在区间 (a,b) 上有实数解；

(3)设 $f(x)=x\ln x$，函数 $y=f(x)$ 是否存在控制函数？若存在，请求出 $y=f(x)$ 的控制函数；若不存在，请说明理由.

21．（2023上·上海松江·高三统考期末）已知函数 $y=f(x)$，记 $f(x)=x+\sin x$，$x\in D$.

(1)若 $D=[0,2\pi]$，判断函数的单调性；

(2)若 $D=\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，不等式 $f(x)>kx$ 对任意 $x\in D$ 恒成立，求实数 k 的取值范围；

(3)若 $D=\mathrm{R}$，则曲线 $y=f(x)$ 上是否存在三个不同的点 A,B,C，使得曲线 $y=f(x)$ 在 A,B,C 三点处的切线互相重合？若存在，求出所有符合要求的切线的方程；若不存在，请说明理由.

22．（2023·上海嘉定·统考一模）中国历史悠久，积累了许多房屋建筑的经验．房梁为柱体，或取整根树干而制为圆柱形状，或作适当裁减而制为长方体形状，例如下图所示．

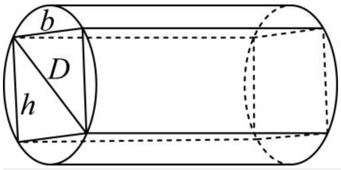
材质确定的梁的承重能力取决于截面形状，现代工程科学常用抗弯截面系数 W 来刻画梁的承重能力．对于两个截面积相同的梁，称 W 较大的梁的截面形状更好．三种不同截面形状的梁的抗弯截面系数公式，如下表所列，

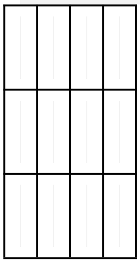
	圆形截面	正方形截面	矩形截面
条件	r 为圆半径	a 为正方形边长	h 为矩形的长，b 为矩形的宽，$h>b$
抗弯截面系数	$W_1=\frac{\pi}{4}r^3$	$W_2=\frac{1}{6}a^3$	$W_3=\frac{1}{6}bh^2$

(1)假设上表中的三种梁的截面面积相等，请问哪一种梁的截面形状最好？并具体说明；

(2)宋朝学者李诫在《营造法式》中提出了矩形截面的梁的截面长宽之比应定为$3:2$的观点．考虑梁取材于圆柱形的树木，设矩形截面的外接圆的直径为常数 D，如下图所示，请问 $h:b$ 为何值时，其抗弯截面系数

取得最大值，并据此分析李诚的观点是否合理.





导数（三大类型题）

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、导数的概念及几何意义

1．（2023·上海青浦·统考一模）若函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=x_0$ 处的导数等于 a，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0-\Delta x\right)}{\Delta x}$ 的值为（　）.

A．0　　B．a　　C．$2a$　　D．$3a$

【答案】C

【分析】根据导数的定义式化简求值.

【详解】由已知得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0-\Delta x\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)+f\left(x_0\right)-f\left(x_0-\Delta x\right)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0\right)-f\left(x_0-\Delta x\right)}{\Delta x}$

$=2f'\left(x_0\right)=2a$，

故选：C.

2．（2023·上海青浦·统考一模）已知有穷等差数列 $\{a_n\}:a_1,a_2,\cdots,a_m(m\geq 3,m\in\mathrm{N}^*)$ 的公差 d 大于零.

(1)证明：$\{a_n\}$ 不是等比数列；

(2)是否存在指数函数 $y=f(x)$ 满足：$y=f(x)$ 在 $x=a_1$ 处的切线的交 x 轴于 $(a_2,0)$，$y=f(x)$ 在 $x=a_2$ 处的切线的交 x 轴于 $(a_3,0)$，…，$y=f(x)$ 在 $x=a_{m-1}$ 处的切线的交 x 轴于 $(a_m,0)$？若存在，请写出函数 $y=f(x)$ 的表达式，并说明理由；若不存在，也请说明理由；

(3)若数列 $\{a_n\}$ 中所有项按照某种顺序排列后可以构成等比数列 $\{b_n\}$，求出所有可能的 m 的取值.

【答案】(1)证明见解析

(2)存在指数函数 $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}$ 满足条件，理由见解析

(3)3

【分析】(1) 计算 $a_2^2-a_1a_3=d^2>0$，得到证明；

(2) 计算切线方程，令 $y=0$ 得 $x=a_i-\dfrac{f(a_i)}{f'(a_i)}$，即 $\dfrac{f(x)}{f'(x)}=-d$，$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}$ 满足条件.

(3) 举例说明 $m=3$ 时成立，考虑 $m\geq 4$ 时，确定 $\{a_n\}$ 不可能所有项均为正数或均为负数，$\{|b_n|\}$ 的前三项

即为$|a_n|$中最小的三项，确定$|a_{k+2}|-|a_k|=2a_{k+1}>0$，考虑$|a_k|<|a_{k+1}|$，$|a_k|>|a_{k+1}|$两种情况，根据等比数列性质得到$a_k^2=a_{k+1}a_{k+2}$，整理得到$a_k=-\frac{2}{3}d$，$a_{k+1}=\frac{1}{3}d$，$a_{k+2}=\frac{4}{3}d$，验证不成立，得到答案.

【详解】（1）$a_2^2-a_1a_3=a_2^2-(a_2-d)(a_2+d)=d^2>0$，故$\{a_n\}$不是等比数列.

（2）$f(x)$在$x=a_i$处的切线方程为$y-f(a_i)=f'(a_i)(x-a_i)$，

令$y=0$得$x=a_i-\frac{f(a_i)}{f'(a_i)}$，因此，欲使$f(x)$满足条件，只需使$\frac{f(x)}{f'(x)}=-d$，

令$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}$，则$f'(x)=-\frac{1}{d}\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}$，满足条件，　故存在指数函数$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{d}}$满足条件.

（3）取$\{a_n\}:-2,1,4$，则$1,-2,4$成等比数列，故$m=3$满足条件.

考虑$m\geq 4$，

首先，$\{a_n\}$不可能所有项均为正数或均为负数，

否则，对应的等比数列$\{b_n\}$的公比为正，等比数列严格增或严格减，

从而$\{a_n\}$即为等比数列，不可能.

其次，因为$\{b_n\}$是等比数列，所以$\{|b_n|\}$也是等比数列，不妨设$\{|b_n|\}$严格增，

则$\{|b_n|\}$的前三项即为$|a_n|$中最小的三项，

则一定对应于$\{a_n\}$中的连续三项$a_{k,}a_{k+1},a_{k+2}(a_k<0,a_{k+2}>0)$，

不妨设$a_{k+1}>0$，则$|a_{k+2}|-|a_k|=a_{k+2}+a_k=2a_{k+1}>0$．

①若$|a_k|<|a_{k+1}|$，则$|a_k|<|a_{k+1}|<|a_{k+2}|$，则$a_k,a_{k+1},a_{k+2}$成等比数列，不可能；

②若$|a_k|>|a_{k+1}|$，则$|a_{k+1}|<|a_k|<|a_{k+2}|$，则$a_{k+1},a_k,a_{k+2}$成等比数列，

$a_k^2=a_{k+1}a_{k+2}$，即$a_k^2=(a_k+d)(a_k+2d)$，得$a_k=-\frac{2}{3}d$，$a_{k+1}=\frac{1}{3}d$，$a_{k+2}=\frac{4}{3}d$，

而除了这三项外，$|a_n|$最小值为$|a_{k-1}|=\frac{5}{3}d$或$|a_{k+3}|=\frac{7}{3}d$，

但a_{k-1}和a_{k+3}均无法与a_{k+1},a_k,a_{k+2}构成等比数列，因此不符合条件.

综上所述：所有可能的m的值是3.

【点睛】关键点睛：本题考查了等差数列和等比数列的综合应用，意在考查学生的计算能力，转化能力和综合应用能力，其中根据特殊例子确定$m=3$满足条件，再考虑$m\geq 4$时不成立，是解题的关键.

二、导数在研究函数中的作用

3．（2023·上海闵行·统考一模）已知函数 $y=f(x)$ 的导函数为 $y=f'(x)$，$x\in\mathbf{R}$，且 $y=f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为严格增函数，关于下列两个命题的判断，说法正确的是（　）

①“$x_1>x_2$”是“$f(x_1+1)+f(x_2)>f(x_1)+f(x_2+1)$”的充要条件；

②“对任意 $x<0$ 都有 $f(x)<f(0)$”是“$y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为严格增函数”的充要条件.

A．①真命题；②假命题　　B．①假命题；②真命题

C．①真命题；②真命题　　D．①假命题；②假命题

【答案】C

【分析】对于①，构造函数 $g(x)=f(x+1)-f(x)$，结合题设，判断“$x_1>x_2$”和“$f(x_1+1)+f(x_2)>f(x_1)+f(x_2+1)$”之间的逻辑推理关系，可判断其真假；对于②，结合函数单调性，判断必要性；采用反证思想，结合题设推出矛盾，说明充分性成立，判断②的真假.

【详解】对于①：

设 $g(x)=f(x+1)-f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，则 $g'(x)=f'(x+1)-f'(x)$，

因为 $y=f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为严格增函数，故 $f'(x+1)>f'(x)$，

即 $g'(x)=f'(x+1)-f'(x)>0$，则 $g(x)=f(x+1)-f(x)$ 在 R 上单调递增，

由于 $x_1>x_2$，故 $g(x_1)>g(x_2)$，即 $f(x_1+1)-f(x_1)>f(x_2+1)-f(x_2)$。

即 $f(x_1+1)+f(x_2)>f(x_1)+f(x_2+1)$；

当 $f(x_1+1)+f(x_2)>f(x_1)+f(x_2+1)$ 成立时，即 $f(x_1+1)-f(x_1)>f(x_2+1)-f(x_2)$，

由于 $g(x)=f(x+1)-f(x)$ 在 R 上单调递增，故 $x_1>x_2$，

故“$x_1>x_2$”是“$f(x_1+1)+f(x_2)>f(x_1)+f(x_2+1)$”的充要条件，①为真命题；

对于②，当 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为严格增函数时，由对任意 $x<0$，则都有 $f(x)<f(0)$ 成立；

当对任意 $x<0$ 都有 $f(x)<f(0)$ 时，假设 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不为严格增函数，

即 $f'(x)$ 不恒大于等于 0，即 $\exists a$，使得 $f'(a)<0$，

由于 $y=f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为严格增函数，故 $x\in(-\infty,a]$ 时，$f'(x)<0$，

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上单调递减，且其图象为一个严格递减的凹型曲线，

故当 x 趋近于负无穷时，$f(x)$ 的值将趋近于正无穷大，

这与对任意 $x<0$ 都有 $f\left(x\right)<f\left(0\right)$ 矛盾，

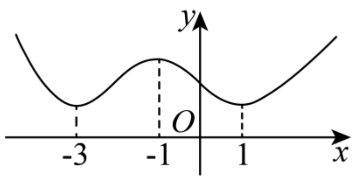
则假设不成立，即“$y=f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为严格增函数”成立，

即“对任意 $x<0$ 都有 $f\left(x\right)<f\left(0\right)$”是“$y=f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为严格增函数”的充要条件，②为真命题，

故选：C

【点睛】关键点睛：解答本题的关键是判断②中命题的充分性成立，解答时采用反证思想，推得矛盾，说明充分性成立.

4.（2023 上·上海松江·高三统考期末）函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象如图所示，$y=f'\left(x\right)$ 为函数 $y=f\left(x\right)$ 的导函数，则不等式 $\dfrac{f'\left(x\right)}{x}<0$ 的解集为（　）



A．$(-3,-1)$　　B．$(0,1)$

C．$(-3,-1)\cup(0,1)$　　D．$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

【答案】C

【分析】先判断 $f'\left(x\right)$ 的符号，由此求得不等式 $\dfrac{f'\left(x\right)}{x}<0$ 的解集.

【详解】由图象可知，在区间 $\left(-\infty,-3\right),\left(-1,1\right)$ 上 $f'\left(x\right)<0$，

在区间 $\left(-3,-1\right),\left(1,+\infty\right)$ 上 $f¢\left(x\right)>0$，

所以不等式 $\dfrac{f'\left(x\right)}{x}<0$ 的解集为 $(-3,-1)\cup(0,1)$.

故选：C

5.（2023·上海青浦·统考一模）已知三个互不相同的实数 a、b、c 满足 $a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=3$，则 abc 的取值范围为____________.

【答案】$\left(-1,\dfrac{5}{27}\right)$

【分析】根据题中实数 a、b、c 所满足等量关系，将 abc 用 c 表示，求出 c 范围，利用导数求出其单调性，进而得到 abc 范围.

【详解】由题 $a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=3$，$a\neq b\neq c$

得 $1=\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=3+\left(2ab+2bc+2ac\right)$，

得 $ab+bc+ac=-1$，

所以 $-1=ab+c(b+a)=ab+c(1-c)$，

则 $ab=c^2-c-1$，

又 $a+b=1-c$，

所以由韦达定理得 a 和 b 为关于 x 的方程 $x^2+(c-1)x+c^2-c-1=0$ 的两不等根，

所以 $\Delta=(c-1)^2-4(c^2-c-1)>0\Rightarrow 3c^2-2c-5<0$，

得 $-1<c<\frac{5}{3}$，

再由 $ab=c^2-c-1$，所以 $abc=c^3-c^2-c$，

构造函数 $f(x)=x^3-x^2-x$，

则 $f'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$，

$f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=-\frac{1}{3}$，

所以在 $\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$，$\left(1,\frac{5}{3}\right)$ 上 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

在 $\left(-\frac{1}{3},1\right)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{5}{27}$，$f\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{125}{27}-\frac{25}{9}-\frac{5}{3}=\frac{5}{27}$，

$f(1)=-1, f(-1)=-1$，

所以 $f(x)=x^3-x^2-x$ 在 $-1<c<\frac{5}{3}$ 上范围为 $\left(-1,\frac{5}{27}\right)$，

所以 abc 的取值范围为 $\left(-1,\frac{5}{27}\right)$.

故答案为：$\left(-1,\frac{5}{27}\right)$

【点睛】方法点睛：本题利用 $a+b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=3$ 之间关系，将 abc 变为一个变量，利用二次函数的性质、韦达定理，利用导数研究函数单调性，属于中档题.

6.（2023·上海金山·统考一模）设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，给定区间 $[a,b]\subseteq D$，若存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则称函数 $y=f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的“均值函数”，x_0 为函数 $y=f(x)$ 的“均值点”.

(1)试判断函数 $y=x^2$ 是否为区间 $[1,2]$ 上的“均值函数”，如果是，请求出其“均值点”；如果不是，请说明理由；

(2)已知函数 $y=-2^{2x-1}+m\cdot 2^{x-1}-12$ 是区间 $[1,3]$ 上的“均值函数”，求实数 m 的取值范围；

(3)若函数 $y=\dfrac{x^2+a}{2(x^2-2x+2)}$（常数 $a\in\mathbf{R}$）是区间 $[-2,2]$ 上的“均值函数”，且 $\dfrac{2}{3}$ 为其“均值点”．将区间 $[-2,0]$ 任意划分成 $m+1$（$m\in\mathrm{N}$）份，设分点的横坐标从小到大依次为 $t_1,t_2,\cdots,t_m$，记 $t_0=-2$，$t_{m+1}=0$，$G=\sum\limits_{i=0}^{m}|f(t_{i+1})-f(t_i)|$．再将区间 $[0,2]$ 等分成 2^n+1（$n\in\mathbf{N}$）份，设等分点的横坐标从小到大依次为 $x_1,x_2,\cdots,x_{2^n}$，记 $H=\sum\limits_{i=1}^{2^n}f(x_i)$．求使得 $H\cdot G>2023$ 的最小整数 n 的值．

【答案】(1) $y=x^2$ 为区间 $[1,2]$ 上的“均值函数”，且 $\sqrt{3}$ 为其“均值点”

(2) $(-\infty,2)\cup[2\sqrt{3}+6,+\infty)$

(3) 15

【分析】（1）根据题意，得到方程 $x_0^2=\dfrac{2^2-1^2}{2-1}$，求得 $x_0=\sqrt{3}$，即可得到答案；

（2）设 x_0 为该函数的“均值点”，则 $x_0\in(1,3)$，根据题意转化为 $(2^{x_0}-3)m=2^{2x_0}-6$ 在 $(1,3)$ 上有解，分类讨论，结合对勾函数性质，即可求解；

（3）根据题意，得到方程 $f(\frac{2}{3})=\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$，求得 $a=0$，得出 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x^2-2x+2)}$，利用导数求得函数的单调性，得到 $f(t_i)\geq f(t_{i+1})$，求得 $G=\dfrac{1}{5}$，结合 $f(x)+f(2-x)=1$，进而求得 $H=2^{n-1}$，利用指数幂的运算性质，即可求解.

【详解】（1）解：设函数 $y=x^2$ 是区间 $[1,2]$ 上的“均值函数”，且均值点为 $x_0\in[1,2]$，

可得 $x_0^2=\dfrac{2^2-1^2}{2-1}$，解得 $x_0=\sqrt{3}$ 或 $x_0=-\sqrt{3}$ (舍).

故 $y=x^2$ 为区间 $[1,2]$ 上的“均值函数”，且 $\sqrt{3}$ 为其“均值点”.

（2）解：设 x_0 为该函数的“均值点”，则 $x_0\in(1,3)$，

且 $-2^{2x_0-1}+m\cdot2^{x_0-1}-12=\dfrac{(-2^5+m\cdot2^2-12)-(-2+m\cdot2^0-12)}{3-1}$，

即关于 x_0 的方程 $2^{2x_0}-m\cdot2^{x_0}+3m-6=0$ 在区间 $(1,3)$ 上有解，

整理得 $(2^{x_0}-3)m=2^{2x_0}-6$，

①当 $2^{x_0}=3$ 时，$0\cdot m=3$，方程无解.

②当 $2^{x_0}\neq3$ 时，可得 $m=\dfrac{2^{2x_0}-6}{2^{x_0}-3}$.

令 $t=2^{x_0}-3$，则 $t\in(-1,0)\cup(0,5)$，且 $2^{x_0}=t+3$，

可得 $m=\dfrac{(t+3)^2-6}{t}=t+\dfrac{3}{t}+6$，

又由对勾函数性质，可得函数 $y=t+\dfrac{3}{t}+6$ 在 $t\in(-1,0)$ 上是严格减函数，

在 $t\in(0,\sqrt{3}]$ 上是严格减函数，在 $t\in[\sqrt{3},5)$ 上严格增函数，

所以当 $t\in(-1,0)$ 时，可得 $y<2$，当 $t\in(0,5)$，可得 $y\geq 2\sqrt{3}+6$，

所以 $m\in(-\infty,2)\cup[2\sqrt{3}+6,+\infty)$.

即实数 m 的取值范围是 $(-\infty,2)\cup[2\sqrt{3}+6,+\infty)$.

（3）解：由函数 $y=\dfrac{x^2+a}{2(x^2-2x+2)}$ 是区间 $[-2,2]$ 上的“均值函数”，且 $\dfrac{2}{3}$ 为其“均值点”，

可得 $f(\dfrac{2}{3})=\dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$，即 $\dfrac{(\frac{2}{3})^2+a}{2[(\frac{2}{3})^2-2\times\frac{2}{3}+2]}=\dfrac{\frac{4+a}{2(4-4+2)}-\frac{4+a}{2(4+4+2)}}{2-(-2)}$，

解得 $a=0$，所以 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x^2-2x+2)}$，

则 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x\cdot(x^2-2x+2)-x^2\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}=\dfrac{x(2-x)}{(x^2-2x+2)^2}$，

当 $x\in[-2,0]$ 时，$f'(x)\leq 0$，即 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x^2-2x+2)}$ 在 $[-2,0]$ 上单调递减，

所以 $f(t_i)\geq f(t_{i+1})$（$i=0,1,2,\cdots,m$），

则 $G=\sum\limits_{i=0}^{m}|f(t_{i+1})-f(t_i)|=\sum\limits_{i=0}^{m}[f(t_i)-f(t_{i+1})]=f(t_0)-f(t_{m+1})=f(-2)-f(0)=\dfrac{1}{5}$，

又因为 $f(x)+f(2-x)=\dfrac{x^2}{2(x-1)^2+2}+\dfrac{(2-x)^2}{2(1-x)^2+2}=1$，

从而 $H=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2^n})$，$H=f(x_{2^n})+f(x_{2^n-1})+\cdots+f(x_1)$，

所以 $2H=2^n$，可得 $H=2^{n-1}$.，

由 $\dfrac{1}{5}\cdot 2^{n-1}>2023$，即 $2^n>20230$，可得 $n>\log_2 20230\approx 14.3$，

故使得 $H\cdot G>2023$ 的最小整数 n 的值为15．

【点睛】方法指数总结：对于函数的新定义题型的求解策略：

（1）关于函数的新定义问题，关键是理解函数新定义的概念，根据函数的新定义的概念，挖掘其隐含条件，把新定义问题转化为函数关系或不等关系式等是解答的关键；

（2）关于函数的新定义问题，通常关联着函数的基本性质的综合应用，解答中要熟练掌握和应用函数的有关性质和一些重用的结论，同时注意合理应用数形结合、导数、均值不等式等知识点的应用，以及它们之间的逻辑关系，提升逻辑推理能力.

7.（2023·上海徐汇·统考一模）若函数 $y=f(x),x\in\mathbf{R}$ 的导函数 $y=f'(x),x\in\mathbf{R}$ 是以 $T(T\neq 0)$ 为周期的函数，则称函数 $y=f(x),x\in\mathbf{R}$ 具有"T 性质".

(1)试判断函数 $y=x^2$ 和 $y=\sin x$ 是否具有"2π 性质"，并说明理由；

(2)已知函数 $y=h(x)$，其中 $h(x)=ax^2+bx+2\sin bx(0<b<3)$ 具有"π 性质"，求函数 $y=h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的极小值点；

(3)若函数 $y=f(x),x\in\mathbf{R}$ 具有"T 性质"，且存在实数 $M>0$ 使得对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $|f(x)|<M$ 成立，求证：$y=f(x),x\in\mathbf{R}$ 为周期函数.

（可用结论：若函数 $y=f(x),x\in\mathbf{R}$ 的导函数满足 $f'(x)=0,x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)=C$（常数）.）

【答案】(1) $f(x)=x^2$ 不具有"2π 性质"，$g(x)=\sin x$ 具有"2π 性质"，理由见解析

(2) $\dfrac{2\pi}{3}$

(3)证明见解析

【分析】（1）根据所给定义计算可得；

（2）法一：依题意可得 $h'(x+\pi)=h'(x)$ 可得 $\cos bx-\cos b(x+\pi)=\dfrac{a\pi}{b}$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，再令 $x=0$、$x=\dfrac{\pi}{b}$ 求出 a、b 的值，再利用导数求出函数的极小值点；法二：依题意可得 $\sin(bx+\dfrac{b\pi}{2})\cdot\sin(\dfrac{b\pi}{2})=\dfrac{a\pi}{2b}$，所以 $\sin(\dfrac{b\pi}{2})=0$ 且 $\dfrac{a\pi}{2b}=0$，即可求出 a、b 的值，再利用导数求出函数的极小值点；

（3）令 $h(x)=f(x+T)-f(x)$，则 $h'(x)=0$，从而得到 $h(x)=c$（c 为常数），法一：分 $c=0$、$c>0$、$c<0$ 三种情况讨论；法二：分 $c=0$ 和 $c\neq 0$ 两种情况讨论，当 $c\neq 0$ 时，不妨令 $c>0$，记 $n=\left[\dfrac{M}{c}\right]+1$，推出矛盾即可得解.

【详解】（1）$f(x)=x^2$ 不具有"2π 性质". 理由是：$f'(x)=2x$，$f'(2\pi)-f'(0)=4\pi\neq 0$，$\therefore f'(2\pi)\neq f'(0)$；

$g(x)=\sin x$ 具有"2π 性质". 理由是：$g'(x)=\cos x$，$g'(x+2\pi)=g'(x)$.

（2）法一：$h(x)=ax^2+bx+2\sin bx(0<b<3)$，则 $h'(x)=2ax+b+2b\cos bx(0<b<3)$，

由 $h'(x+\pi)=h'(x)$ 可得 $\cos bx-\cos b(x+\pi)=\dfrac{a\pi}{b}$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

令 $x=0$，得 $1-\cos b\pi=\frac{a\pi}{b}$ ①；令 $x=\frac{\pi}{b}$，得 $-1+\cos b\pi=\frac{a\pi}{b}$ ②.

①+②得 $\frac{2a\pi}{b}=0$，因此 $a=0$，从而 $\cos bx=\cos(bx+b\pi)$ 恒成立，

$\therefore b\pi=2k\pi$ 即有 $b=2k,k\in\mathbf{Z}$ 且 $b\neq0$.

由 $0<b<3$ 得 b=2，所以 $h'(x)=2+4\cos 2x$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，令 $h'(x)=0$ 可得 $x=\frac{\pi}{3},x=\frac{2\pi}{3}$，列表如下：

x	$[0,\frac{\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$	$\frac{2\pi}{3}$	$(\frac{2\pi}{3},\pi]$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

函数 $h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 的极小值点为 $\frac{2\pi}{3}$.

法二： $h'(x)=2ax+b+2b\cos bx(0<b<3)$，

由 $h'(x+\pi)=h'(x)$，可得 $\cos bx-\cos b(x+\pi)=\frac{a\pi}{b}$，

所以 $\cos\left[\left(bx+\frac{b\pi}{2}\right)-\frac{b\pi}{2}\right]-\cos\left[\left(bx+\frac{b\pi}{2}\right)+\frac{b\pi}{2}\right]=\frac{a\pi}{b}$，

即 $\cos\left(bx+\frac{b\pi}{2}\right)\cos\frac{b\pi}{2}+\sin\left(bx+\frac{b\pi}{2}\right)\sin\frac{b\pi}{2}-\cos\left(bx+\frac{b\pi}{2}\right)\cos\frac{b\pi}{2}+\sin\left(bx+\frac{b\pi}{2}\right)\sin\frac{b\pi}{2}=\frac{a\pi}{b}$，

所以 $\sin(bx+\frac{b\pi}{2})\cdot\sin(\frac{b\pi}{2})=\frac{a\pi}{2b}$，所以 $\sin(\frac{b\pi}{2})=0$ 且 $\frac{a\pi}{2b}=0$，所以 $a=0$ 且 $b=2k(k\in Z)$ 且 $b\neq0$.

由 $0<b<3$ 得 b=2，所以 $h'(x)=2+4\cos 2x$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，令 $h'(x)=0$ 可得 $x=\frac{\pi}{3},x=\frac{2\pi}{3}$，列表如下：

x	$[0,\frac{\pi}{3})$	$\frac{\pi}{3}$	$(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$	$\frac{2\pi}{3}$	$(\frac{2\pi}{3},\pi]$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

函数 $h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 的极小值点为 $\frac{2\pi}{3}$.

（3）令 $h(x)=f(x+T)-f(x)$，因为 $y=f(x),x\in R$ 具有“T”性质

$\therefore f'(x+T)=f'(x)$，

$\therefore h'(x)=f'(x+T)-f'(x)=0$，

$\therefore h(x)=c=f(x+T)-f(x)$（$c$ 为常数），

法一：

① 若 $c=0$，$f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数；

②若 $c>0$，由 $f(nT)=f(0)+nc$，

当 $n\geq\frac{M-f(0)}{c}$ 时，$f(nT)=f(0)+nc\geq f(0)+M-f(0)=M$，这与 $|f(x)|<M$ 矛盾，舍去；

③若 $c<0$，由 $f(nT)=f(0)+nc$，

当 $n\leq\frac{-M-f(0)}{c}$ 时，$f(nT)=f(0)+nc\leq f(0)-M-f(0)=-M$，这与 $|f(x)|<M$ 矛盾，舍去.

综上，$c=0$．$f(x+T)-f(x)=0$，所以 $f(x)$ 是周期函数.

法二：

当 $c=0$ 时，$f(x+T)-f(x)=0$，所以 $f(x)$ 是周期函数.

当 $c\neq 0$ 时，不妨令 $c>0$，记 $n=\left[\frac{M}{c}\right]+1$，其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数.（$c<0$ 同理可证），

若存在 $f(x_0)>0$，这 $|f(x_0+nT)|=f(x_0)+nc>nc=\left(\left[\frac{M}{c}\right]+1\right)c>M$.

这与 $|f(x)|<M$ 矛盾.

若存在 $f(x_0)<0$，这 $|f(x_0-nT)|=|f(x_0)-nc|>nc=\left(\left[\frac{M}{c}\right]+1\right)c>M$.

这与 $|f(x)|<M$ 矛盾.

若不存在 $x_0\in\mathrm{R}$，使得 $f(x_0)>0$ 或 $f(x_0)<0$，则 $f(x)=0,x\in\mathrm{R}$，此时 $c=0$，与 $c\neq 0$ 矛盾，故舍去.

综上，$c=0$．$f(x+T)-f(x)=0$，所以 $f(x)$ 是周期函数.

【点睛】方法点睛：函数新定义问题的方法和技巧：

（1）可通过举例子的方式，将抽象的定义转化为具体的简单的应用，从而加深对信息的理解；

（2）可用自己的语言转述新信息所表达的内容，如果能清晰描述，那么说明对此信息理解的较为透彻；

（3）发现新信息与所学知识的联系，并从描述中体会信息的本质特征与规律；

（4）如果新信息是课本知识的推广，则要关注此信息与课本中概念的不同之处，以及什么情况下可以使用书上的概念.

8.（2023 上·上海浦东新·高三统考期末）设 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的函数，若存在区间 $[a,b]$ 和 $x_0\in(a,b)$，使得 $y=f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 上严格减，在 $[x_0,b]$ 上严格增，则称 $y=f(x)$ 为"含谷函数"，x_0 为"谷点"，$[a,b]$ 称为 $y=f(x)$ 的一个"含谷区间".

(1)判断下列函数中，哪些是含谷函数？若是，请指出谷点；若不是，请说明理由：

（i）$y=2|x|$，（ii）$y=x+\cos x$；

(2)已知实数 $m>0$，$y=x^2-2x-m\ln(x-1)$ 是含谷函数，且 $[2,4]$ 是它的一个含谷区间，求 m 的取值范围；

(3)设 $p,q\in\mathrm{R}$，$h(x)=-x^4+px^3+qx^2+(4-3p-2q)x$．设函数 $y=h(x)$ 是含谷函数，$[a,b]$ 是它的一个含谷区间，并记 $b-a$ 的最大值为 $L(p,q)$．若 $h(1)\le h(2)$，且 $h(1)\le 0$，求 $L(p,q)$ 的最小值.

【答案】(1) $y=2|x|$ 是含谷函数，谷点 $x=0$； $y=x+\cos x$ 不是含谷函数，证明见解析.

(2) $(2,18)$

(3) $\sqrt{2}$

【分析】（1）利用含谷函数定义判断函数的增减区间，再求谷点，证明函数是否为含谷函数；

（2）由题意可判断函数在区间 $[2,4]$ 内有谷点，利用谷点定义求参数取值范围；

（3）分别讨论函数 $h(x)$ 的单调性，判断谷点所在区间，得到 $L(p,q)$ 的解析式，再利用 $h(1)\le h(2)$ 和 $h(1)\le 0$ 消元求最值.

【详解】（1）函数 $y=2|x|=\begin{cases}-2x,x<0\\2x,x\ge 0\end{cases}$，当 $x\in(-\infty,0]$ 时，单调递减，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，单调递增，所以 $y=2|x|$ 是含谷函数，谷点 $x=0$；

函数 $y=x+\cos x$，求导 $y'=1-\sin x\ge 0$ 恒成立，函数单调递增，所以不是含谷函数.

（2）由题意可知函数 $y=x^2-2x-m\ln(x-1)$ 在区间 $[2,4]$ 内先减后增，且存在谷点，

令 $g(x)=x^2-2x-m\ln(x-1)$，所以 $g'(x)=2x-2-\dfrac{m}{x-1}$，

设 $q(x)=g'(x)=2x-2-\dfrac{m}{x-1}$，

所以 $q'(x)=2+\dfrac{m}{(x-1)^2}$，由 $m>0$ 可知 $q'(x)=2+\dfrac{m}{(x-1)^2}>0$ 恒成立，

所以 $g'(x)$ 在区间 $[2,4]$ 上单调递增，

若满足谷点，则有 $\begin{cases}g'(2)=2-m<0\\g'(4)=6-\dfrac{m}{3}>0\end{cases}$，解得 $2<m<18$，

故 m 的取值范围是 $(2,18)$.

（3）因为 $h(x)=-x^4+px^3+qx^2+(4-3p-2q)x$，

所以 $h'(x)=-4x^3+3px^2+2qx+(4-3p-2q)=4(1-x)\left[x^2+\left(1-\frac{3p}{4}\right)x+\left(1-\frac{3p}{4}-\frac{q}{2}\right)\right]$，

若 $x^2+\left(1-\frac{3p}{4}\right)x+\left(1-\frac{3p}{4}-\frac{q}{2}\right)\ge 0$ 恒成立，

则函数 $y=h(x)$ 在 $x\le 1$ 时严格增，在 $x\ge 1$ 时严格减，不是谷函数，不满足题意；

因此关于 x 的方程 $x^2+\left(1-\frac{3p}{4}\right)x+\left(1-\frac{3p}{4}-\frac{q}{2}\right)=0$ 有两个相异实根，即 $\Delta>0$，

设两根为 α，β 且 $\alpha<\beta$，

因为 $h(1)\le 0=h(0)$，所以函数 $y=h(x)$ 在区间 $(-\infty,1]$ 上不为严格增，

但是当 $x<\min\{1,\alpha,\beta\}$ 时，$h'(x)>0$，$y=h(x)$ 为严格增，

所以 $y=h(x)$ 在区间 $(-\infty,1]$ 上的单调性至少改变一次，从而必有一个驻点，即 $\alpha<1$，

同理，因为 $h(1)\le h(2)$，所以 $\beta>1$，

因此，$y=h(x)$ 在区间 $(-\infty,\alpha]$ 和 $[1,\beta]$ 上严格增，在区间 $[\alpha,1]$ 和 $[\beta,+\infty)$ 上严格减，

从而函数 $y=h(x)$ 的含谷区间 $[a,b]$ 必满足 $[a,b]\subseteq[\alpha,\beta]$，

即 $L(p,q)=\beta-\alpha=\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(1-\frac{3p}{4}\right)^2-4\left(1-\frac{3p}{4}-\frac{q}{2}\right)}=\sqrt{\frac{9}{16}p^2+\frac{3}{2}p-3+2q}$，

因为 $h(1)=-1+p+q+4-3p-2q=3-2p-q$，

$h(2)=-16+8p+4q+8-6p-4q=-8+2p$，

由 $h(1)\le h(2)$ 得 $3-2p-q\le -8+2p$，所以 $4p+q\ge 11$，

由 $h(1)\le 0$ 得 $3-2p-q\le 0$，所以 $2p+q\ge 3$，

所以 $q\ge\begin{cases}11-4p, p\le 4\\ 3-2p, p>4\end{cases}$，

当 $p\le 4$ 时，$L(p,q)\ge\sqrt{\frac{9}{16}p^2-\frac{13}{2}p+19}\ge\sqrt{2}$，

当 $p>4$ 时，$L(p,q)\ge\sqrt{\frac{9}{16}p^2-\frac{5}{2}p+3}\ge\sqrt{2}$，

因此 $L(p,q)$ 的最小值为 $\sqrt{2}$，当 $p=4,q=-5$ 时成立.

【点睛】关键点睛：（1）利用谷点定义判断函数是否为含谷函数；

（2）根据谷点性质求参数的取值范围；

（3）将导数分解因式，利用二次函数性质讨论 $y=h(x)$ 的单调性，进而得到 $[a,b]\subseteq[\alpha,\beta]$ 和 $L(p,q)$，求函数最值.

9.（2023 上·上海·高三上海市七宝中学校联考阶段练习）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x$，$g(x)=\mathrm{e}^{-x}+x$，其中 e 为自然对数的底数，设函数 $F(x)=af(x)-g(x)$，

(1)若 $a=\mathrm{e}$，求函数 $y=F(x)$ 的单调区间，并写出函数 $y=F(x)-m$ 有三个零点时实数 m 的取值范围；

(2)当 $0<a<1$ 时，x_1、x_2 分别为函数 $y=F(x)$ 的极大值点和极小值点，且不等式 $F(x_1)+tF(x_2)>0$ 对任意 $a\in(0,1)$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

(3)对于函数 $y=f(x)$，若实数 x_0 满足 $f(x_0)f(x_0+F)=D$，其中 F、D 为非零实数，则 x_0 称为函数 $f(x)$ 的“$F-D-$笃志点”.

①已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, x>0\\ \dfrac{1}{x+a}, x<0\end{cases}$，且函数 $f(x)$ 有且只有 3 个“$1-1-$笃志点”，求实数 a 的取值范围；

②定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：存在唯一实数 m，对任意的实数 x，使得 $f(m+x)=f(m-x)$ 恒成立或 $f(m+x)=-f(m-x)$ 恒成立.对于有序实数对 (F,D)，讨论函数 $f(x)$“$F-D-$笃志点”个数的奇偶性，并说明理由

【答案】(1)函数的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-1,0)$，$m\in(\mathrm{e}-1,2)$

(2) $(-\infty,-1]$

(3)① $(2,\mathrm{e})$；②答案见解析

【分析】（1）求导得到单调区间，计算极值，画出函数图像，根据图像得到答案.

（2）求导得到导函数，确定极值点和单调区间，确定 $t<0$，构造新函数，确定函数的单调区间，计算最值，考虑 $t\le-1$ 和 $-1<t<0$ 两种情况，根据函数的单调性计算最值即可.

（3）①考虑 $x_0>0$，$-1<x_0<0$，$x_0<-1$ 三种情况，代入数据，构造新函数，根据二次函数根的分布得到范围；②确定 $f(2m-x_0-F)f[(2m-x_0-F)+F]=D$，比较 $2m-x_0-F$ 与 x_0 的大小关系，得到 $f\left(m-\dfrac{F}{2}\right)f\left(m+\dfrac{F}{2}\right)=D$，得到答案.

【详解】（1）$F(x)=\mathrm{e}f(x)-g(x)=\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}x-\mathrm{e}^{-x}-x$，

$F'(x)=e^{x+1}-e+e^{-x}-1=(e^x-1)(e-e^{-x})$，

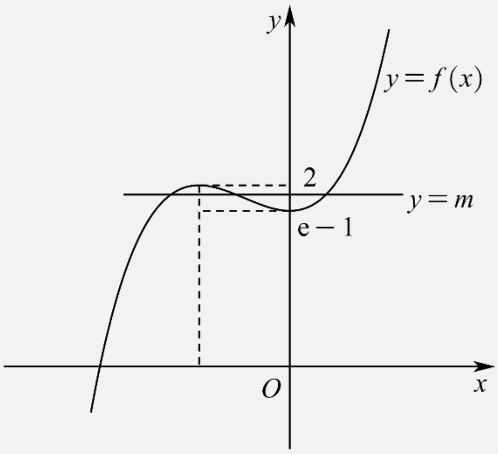
当 $x<-1$ 时，$e^x-1<0$，$e-e^{-x}<0$，故 $F'(x)>0$，函数单调递增；

当 $-1<x<0$ 时，$e^x-1<0$，$e-e^{-x}>0$，故 $F'(x)<0$，函数单调递减；

当 $x>0$ 时，$e^x-1>0$，$e-e^{-x}>0$，故 $F'(x)>0$，函数单调递增；

综上所述：函数的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-1,0)$.

$f(-1)=2$，$f(0)=e-1$，画出函数图像，如图所示：



根据图像知 $m\in(e-1,2)$.

（2）$F(x)=af(x)-g(x)=a(e^x-x)-(e^{-x}+x)$，$F'(x)=af(x)-g(x)=a(e^x-1)+(e^{-x}-1)=(e^x-1)(a-e^{-x})$，

取 $F'(x)=0$，得到 $x=0$ 或 $x=-\ln a$，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$F'(x)>0$，函数在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

当 $x\in(0,-\ln a)$ 时，$F'(x)<0$，函数在 $(0,-\ln a)$ 上单调递减，

当 $x\in(-\ln a,+\infty)$ 时，$F'(x)>0$，函数在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

故 $x_1=0$ 是极大值点，$x_2=-\ln a$ 是极小值点，

$F(x_1)+tF(x_2)=a-1+t(a\ln a+\ln a-a+1)>0$ 恒成立，

$F(x_1)=a-1<0$，$F(x_2)=a\ln a+\ln a-a+1<F(x_1)<0$，故 $t<0$，

设 $h(a)=a-1+t(a\ln a+\ln a-a+1)$，$a\in(0,1)$，

$h'(a)=1+t\left(\ln a+1+\frac{1}{a}-1\right)=1+t\left(\ln a+\frac{1}{a}\right)$，

设 $m(a)=\ln a+\dfrac{1}{a}$，则 $m'(a)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{a-1}{a^2}<0$ 恒成立，

故 $m(a)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，$m(a)>m(1)=1$，

当 $t\le -1$ 时，$h'(a)=1+t\left(\ln a+\dfrac{1}{a}\right)<0$，函数 $h(a)$ 单调递减，$h(a)>h(1)=0$；

当 $-1<t<0$ 时，存在 $a_0\in(0,1)$，使得 $h'(a_0)=0$，

$x\in(0,a_0)$ 时，$h'(a)<0$，函数单调递减；$x\in(a_0,1)$ 时，$h'(a)>0$，函数单调递增；

故 $h(a_0)<h(1)=0$，不成立；

综上所述：$t\in(-\infty,-1]$.

（3）①$f(x_0)f(x_0+1)=1$ 有三个不等的实数根，

当 $x_0>0$ 时，$x_0+1>1$，故 $\mathrm{e}^{x_0}\cdot\mathrm{e}^{x_0+1}=1$，解得 $x_0=-\dfrac{1}{2}$，不符合；

当 $-1<x_0<0$ 时，$x_0+1>0$，故 $\dfrac{\mathrm{e}^{x_0+1}}{x_0+a}=1$，即 $a=\mathrm{e}^{x_0+1}-x_0$，

令 $g(x)=\mathrm{e}^{x+1}-x(-1<x<0)$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^{x+1}-1>0$ 在 $-1<x<0$ 上恒成立，故 $g(x)=\mathrm{e}^{x+1}-x$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，故 $g(x)=\mathrm{e}^{x+1}-x\in(2,\mathrm{e})$，

故当 $a\in(2,\mathrm{e})$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 有 1 个"1−1−笃志点"；

当 $x_0<-1$ 时，$x_0+1<0$，故 $\dfrac{1}{x_0+a}\cdot\dfrac{1}{x_0+1+a}=1$，

则 $x_0^2+(2a+1)x_0+a^2+a-1=0$，由于 $x_0^2+(2a+1)x_0+a^2+a-1=0$ 至多有两个根，

结合前面分析 a 的取值范围为 $(2,\mathrm{e})$ 的子集，

令 $w(x)=x^2+(2a+1)x+a^2+a-1$，其中 $\Delta=(2a+1)^2-4(a^2+a-1)=5>0$，

$w(-1)=1-(2a+1)+a^2+a-1=a^2-a-1=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$，当 $a\in(2,\mathrm{e})$ 时，

$w(-1)=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}>\left(2-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}=1$，

$w(x)=x^2+(2a+1)x+a^2+a-1$ 的图象的对称轴为 $x=-a-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{5}{2}$，

故 $w(x)=x^2+(2a+1)x+a^2+a-1$ 在 $x\in(-\infty,-1)$ 上有两个不相等的实数根，

综上所述：

函数 $f(x)$ 有且只有 3 个“$1-1-$笃志点”，则实数 a 的取值范围为 $(2,\mathrm{e})$；

② 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：

存在唯一实数 m，对任意的实数 x，使得 $f(m+x)=f(m-x)$ 恒成立，

故 $f(x_0)=f(2m-x_0)$，$f(x_0+F)=f(2m-x_0-F)$，

因为 $f(x_0)f(x_0+F)=D$，所以 $f(2m-x_0)f(2m-x_0-F)=D$，

即 $f(2m-x_0-F)f[(2m-x_0-F)+F]=D$，

比较 $2m-x_0-F$ 与 x_0 的大小关系，

若存在 x_0，使得 $\begin{cases}2m-x_0-F=x_0\\ f(x_0)f(x_0+F)=D\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_0=m-\dfrac{F}{2}\\ f\left(m-\dfrac{F}{2}\right)f\left(m-\dfrac{F}{2}+F\right)=D\end{cases}$，

则有 $f\left(m-\dfrac{F}{2}\right)f\left(m+\dfrac{F}{2}\right)=D$ 成立，

故对于有序实数对 (F,D)，函数 $f(x)$“$F-D-$笃志点” 个数为奇数个，

同理，对于定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：

存在唯一实数 m，对任意的实数 x，使得 $f(m+x)=-f(m-x)$ 恒成立，

故 $f(x_0)=-f(2m-x_0)$，$f(x_0+F)=-f(2m-x_0-F)$，

因为 $f(x_0)f(x_0+F)=D$，所以 $[-f(2m-x_0)]\cdot[-f(2m-x_0-F)]=D$，

即 $f(2m-x_0)f(2m-x_0-F)=D$，可得到同样的结论；综上所述：若存在 x_0，使得 $\begin{cases}2m-x_0-F=x_0\\ f(x_0)f(x_0+F)=D\end{cases}$，

则函数 $f(x)$“$F-D-$笃志点”个数为奇数个，

否则，函数 $f(x)$“$F-D-$笃志点”个数为偶数个.

【点睛】关键点睛：本题考查了函数的新定义问题，利用导航求参数范围，函数的最值极值，零点问题和恒成立问题，意在考查学生的计算能力，转化能力和综合应用能力，其中分类讨论的方法是解题的关键，分类讨论是常用的数学方法，需要熟练掌握.

10.（2023·上海长宁·统考一模）若函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 满足：对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，都有

$|f(x_1)-f(x_2)|\geq|g(x_1)-g(x_2)|$，则称函数 $y=f(x)$ 是函数 $y=g(x)$ 的“约束函数”.已知函数 $y=f(x)$ 是函

数 $y=g(x)$ 的“约束函数”.

(1)若 $f(x)=x^2$，判断函数 $y=g(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

(2)若 $f(x)=ax+x^3(a>0),g(x)=\sin x$，求实数 a 的取值范围；

(3)若 $y=g(x)$ 为严格减函数，$f(0)<f(1)$，且函数 $y=f(x)$ 的图像是连续曲线，求证：$y=f(x)$ 是 $(0,1)$ 上的严格增函数.

【答案】(1) $y=g(x)$ 是偶函数；理由见解析

(2) $a\geq 1$

(3)证明见解析

【分析】（1）根据题意结合偶函数的定义分析证明；

（2）根据题意结合 $y=f(x)$ 的单调性分析可得 $f(x_1)+g(x_1)\leq f(x_2)+g(x_2)$，$f(x_1)-g(x_1)\leq f(x_2)-g(x_2)$，设 $u(x)=f(x)+g(x)$，$v(x)=f(x)-g(x)$，可知 $y=u(x)$ 与 $y=v(x)$ 均为 R 上的严格增函数，利用导数分析求解；

（3）根据题意分析可得任意 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，利用反证法先证当 $0<x<1$ 时，$f(0)<f(x)<f(1)$，再明当 $0<x_1<x_2<1$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$，即可得结果.

【详解】（1）因为 $f(x)=x^2$，故对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)-f(-x)=0$.

又因为函数 $y=f(x)$ 是函数 $y=g(x)$ 的“约束函数”，

则对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\geq|g(x_1)-g(x_2)|$，

取 $x_1=x\in\mathbf{R},x_2=-x$，可得 $0=|f(x)-f(-x)|\geq|g(x)-g(-x)|$ 恒成立，

即 $g(x)=g(-x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 成立，故 $y=g(x)$ 是偶函数；

（2）因为 $y=ax(a>0),y=x^3$ 是 R 上的严格增函数，则 $y=f(x)$ 是 R 上的严格增函数，

设 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)<f(x_2)$，

进而 $|g(x_1)-g(x_2)|\leq f(x_2)-f(x_1)$，

可得 $g(x_1)-g(x_2)\leq f(x_2)-f(x_1)$，$g(x_2)-g(x_1)\leq f(x_2)-f(x_1)$，

所以 $f(x_1)+g(x_1)\leq f(x_2)+g(x_2)$，$f(x_1)-g(x_1)\leq f(x_2)-g(x_2)$，

设 $u(x)=f(x)+g(x)$， $v(x)=f(x)-g(x)$，

则 $y=u(x)$ 与 $y=v(x)$ 均为 R 上的严格增函数，

因为 $u'(x)=a+3x^2+\cos x\geq 0$， $v'(x)=a+3x^2-\cos x\geq 0$ 恒成立，

对于 $v'(x)=a+3x^2-\cos x\geq 0$ 恒成立，

因为 $3x^2\geq 0$， $-\cos x\geq -1$， 当且仅当 $x=0$ 时， 等号成立，

所以 $a+3x^2-\cos x\geq a-1\geq 0$， 解得得 $a\geq 1$，

当 $a\geq 1$ 时， $u'(x)=a+3x^2+\cos x\geq a+\cos x\geq 0$ 恒成立，

所以实数 a 的取值范围为 $a\geq 1$.

（3）设 $x_1<x_2$，因为 $y=g(x)$ 是严格减函数，所以 $g(x_1)>g(x_2)$，即 $g(x_1)-g(x_2)>0$，

而 $|f(x_2)-f(x_1)|\geq|g(x_1)-g(x_2)|$， 所以 $|f(x_1)-f(x_2)|>0$，

所以对任意 $x_1<x_2$， 都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，

①首先证明：当 $0<x<1$ 时， $f(0)<f(x)<f(1)$，

假设存在 $0<x_0<1$， 且 $f(1)<f(x_0)$，

设 $h(x)=f(x)-f(1)$， 则 $h(0)<0$， $h(x_0)>0$，

所以存在 $x_3\in(0,x_0)$， 使得 $h(x_3)=0$，

得 $f(x_3)=f(1)$， 与结论对任意 $x_1<x_2$， $f(x_1)\neq f(x_2)$ 矛盾，

所以不存在 $0<x_0<1$， 使得 $f(1)<f(x_0)$，

同理可得：也不存在 $0<x_0<1$， 使得 $f(x_0)<f(0)$，

所以当 $0<x<1$ 时， $f(0)<f(x)<f(1)$.

②再证明：当 $0<x_1<x_2<1$ 时， $f(x_1)<f(x_2)$，

假设存在 $0<x_1<x_2<1$， 使得 $f(x_1)>f(x_2)$， 则 $f(0)<f(x_2)<f(x_1)<f(1)$，

设 $h(x)=f(x)-f(x_2)$， 则 $h(0)<0$， $h(x_1)>0$，

所以存在 $x_3\in(0,x_1)$， 使得 $h(x_3)=0$，

得 $f(x_3)=f(x_2)$， 与结论对任意 $x_1<x_2$， $f(x_1)\neq f(x_2)$ 矛盾，

所以假设不成立，即对任意 $x_1,x_2\in(0,1)$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$

所以 $y=f(x)$ 是 $(0,1)$ 上的严格增函数.

【点睛】关键点睛："新定义"题型的关键是根据新定义的概念、新公式、新定理、新法则、新运算五种，然后根据此新定义去解决问题，有时还需要用类比的方法去理解新的定义，这样有助于对新定义的透彻理解，（3）中也结合反证法分析求解.

11．（2023·上海普陀·统考一模）设函数 $y=f(x)$ 的表达式为 $f(x)=a\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$.

(1)求证："$a=1$"是"函数 $y=f(x)$ 为偶函数"的充要条件；

(2)若 $a=1$，且 $f(m+2)\le f(2m-3)$，求实数 m 的取值范围.

【答案】(1)证明见解析；

(2) $m\le\frac{1}{3}$ 或 $m\ge 5$.

【分析】（1）根据给定条件，利用偶函数的定义、结合充要条件的意义推理即得.

（2）利用偶函数性质及在 $[0,+\infty)$ 的单调性求解不等式即可.

【详解】（1）函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 的定义域为 R，$\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$ 不恒为 0，

函数 $y=f(x)$ 为偶函数 $\Leftrightarrow \forall x\in\mathrm{R}, f(-x)-f(x)=0$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathrm{R}, a\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x-(a\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})=0 \Leftrightarrow \forall x\in\mathrm{R},(1-a)(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})=0 \Leftrightarrow a=1$，

所以"$a=1$"是"函数 $y=f(x)$ 为偶函数"的充要条件.

（2）当 $a=1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，求导得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$，函数 $f'(x)$ 在 R 上单调递增，

当 $x>0$ 时，$f'(x)>f'(0)=0$，即函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递增，又 $f(x)$ 是偶函数，

因此 $f(m+2)\le f(2m-3)\Leftrightarrow f(|m+2|)\le f(|2m-3|)\Leftrightarrow |m+2|\le|2m-3|$，

即 $(m-5)(3m-1)\ge 0$，解得 $m\le\frac{1}{3}$ 或 $m\ge 5$，

所以实数 m 的取值范围是 $m\le\frac{1}{3}$ 或 $m\ge 5$.

12．（2023·上海崇明·统考一模）已知 $f(x)=mx+\sin x\ (m\in\mathrm{R},m\ne 0)$.

(1)若函数 $y=f(x)$ 是实数集 R 上的严格增函数，求实数 m 的取值范围；

(2)已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列（公差 $d\ne 0$），$b_n=f(a_n)$. 是否存在数列 $\{a_n\}$ 使得数列 $\{b_n\}$ 是等差数列？若存在，请写出一个满足条件的数列 $\{a_n\}$，并证明此时的数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；若不存在，请说明理由；

(3)若 $m=1$，是否存在直线 $y=kx+b$ 满足：①对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\geq kx+b$ 成立，

②存在 $x_0\in\mathbf{R}$ 使得 $f(x_0)=kx_0+b$？若存在，请求出满足条件的直线方程；若不存在，请说明理由．

【答案】(1) $m>1$

(2)存在数列 $\{a_n\}$，数列 $\{a_n\}$ 满足：$\sin a_n+\sin a_{n+2}=2\sin a_{n+1}$，证明见解析

(3)存在直线满足题意，直线方程为 $y=x-1$

【分析】（1）此题分析题意，根据实数集题意可得 $f'(x)=m+\cos x>0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，故可得出答案.

（2）利用等差数列性质，结合题意，首先得出 $b_n+b_{n+2}=2b_{n+1}$ 对一切正整数 n 成立.

再经过化简计算得出结果.

（3）首先分析题意，按 b 三种不同情况进行分析，最后得出直线方程为 $y=x-1$.

【详解】（1）（1）因为函数 $y=f(x)$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的严格增函数，

所以 $f'(x)=m+\cos x>0$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都成立

因为函数 $y=m+\cos x$ 的最小值为 $m-1$，所以 $m>1$

（2）$b_n=\sin a_n+ma_n$，若 $\{b_n\}$ 是等差数列，则 $b_n+b_{n+2}=2b_{n+1}$ 对一切正整数 n 成立，

即 $\sin a_n+ma_n+\sin a_{n+2}+ma_{n+2}=2\sin a_{n+1}+2ma_{n+1}$，

将 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$ 代入化简得 $\sin a_n+\sin a_{n+2}=2\sin a_{n+1}$，

即 $\sin(a_{n+1}-d)+\sin(a_{n+1}+d)=2\sin a_{n+1}$，

展开化简得 $2\sin a_{n+1}\cdot(\cos d-1)=0$ 对一切正整数 n 成立，所以 $\cos d=1$，

故 $d=2k\pi(k\neq 0,k\in Z)$；

此时 $b_n=\sin a_n+ma_n=\sin[a_1+(n-1)2k\pi]+m[a_1+(n-1)2k\pi]$

$=m(n-1)2k\pi+ma_1+\sin a_1$，所以 $b_{n+1}-b_n=m2k\pi$ 为常数，

故 $\{b_n\}$ 是等差数列

（3）令 $g(x)=(x+\sin x)-(kx+b)=(1-k)x+\sin x-b$

则当 $m\in\mathbf{Z}$ 时，$g(\frac{b}{1-k}+2m\pi)=2(1-k)m\pi+\sin\frac{b}{1-k}$

$k>1$ 时，存在 $m\in\mathbf{Z}$ 使得 $g(\frac{b}{1-k}+2m\pi)<0$，

即存在 $x\in\mathbf{R}$ 使得 $f(x)<kx+b$，与题意不符

同理，$k<1$时，存在$x\in\mathbf{R}$使得$f(x)<kx+b$，与题意不符

$k=1$时，$g(x)=\sin x-b$

当$b>-1$时，显然存在$x\in\mathbf{R}$使得$g(x)<0$，即存在$x\in\mathbf{R}$使得$f(x)<kx+b$

当$b<-1$时，对任意的$x\in\mathbf{R}$都有$g(x)>0$，

当$b=1$时，存在$x_0=-\dfrac{\pi}{2}$，使得$f(x_0)=kx_0+b$，且对任意的$x\in R$都有$g(x)\geq 0$，即对任意的$x\in\mathbf{R}$都有$f(x)\geq kx+b$

综上，存在直线$y=kx+b$满足题意，直线方程为$y=x-1$

13．（2023·上海普陀·统考一模）若存在常数t，使得数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}-a_1a_2a_3\cdots a_n=t$（$n\geq 1$，$n\in\mathbf{N}$），则称数列$\{a_n\}$为“$H(t)$数列”.

(1)判断数列：1，2，3，8，49是否为“$H(1)$数列”，并说明理由；

(2)若数列$\{a_n\}$是首项为2的“$H(t)$数列”，数列$\{b_n\}$是等比数列，且$\{a_n\}$与$\{b_n\}$满足$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=a_1a_2a_3\cdots a_n+\log_2 b_n$，求$t$的值和数列$\{b_n\}$的通项公式；

(3)若数列$\{a_n\}$是“$H(t)$数列”，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_1>1$，$t>0$，试比较$\ln a_n$与a_n-1的大小，并证明$t>S_{n+1}-S_n-\mathrm{e}^{S_n-n}$.

【答案】(1)不是“$H(1)$”数列

(2)$t=-1$，$b_n=2^{n+1}$

(3)$\ln a_n<a_n-1$，证明见解析

【分析】（1）根据“$H(t)$数列”的定义进行判断，说明理由；

（2）根据$\{a_n\}$是首项为2的“$H(t)$数列”，求出a_2,a_3，由$\{b_n\}$是等比数列，设公比为q，由$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=a_1a_2a_3\cdots a_n+\log_2 b_n$，可得$\sum_{i=1}^{n+1}a_i^2=a_1a_2a_3\cdots a_na_{n+1}+\log_2 b_{n+1}$，作差可得$a_{n+1}^2=a_1a_2a_3\cdots a_n(a_{n+1}-1)+\log_2 b_{n+1}-\log_2 b_n$，利用$\{b_n\}$前三项数列，可以求解$t$和$q$，进而求解等比数列$\{b_n\}$的通项公式；

（3）根据题意构造函数$f(x)=\ln x-x+1$，求导并判断$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，由$\{a_n\}$是“$H(t)$数列”与$a_1>1,t>0$，反复利用$a_{n+1}=a_1a_2a_3\cdots a_n+t$，可得对于任意的$n\geq 1,n\in\mathbf{N}$，$a_n>1$,进而得到$\ln a_n<a_n-1$，

推出 $\ln(a_1a_2\cdots a_n)<S_n-n$，再利用 $y=\ln x$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递增，得到 $a_1a_2\cdots a_n<e^{S_n-n}$，通过已知条件变形推出 $t>S_{n+1}-S_n-e^{S_n-n}$.

【详解】（1）根据"$H(t)$ 数列"的定义，则 $t=1$，故 $a_{n+1}-a_1a_2a_3\cdots a_n=1$，

因为 $a_2-a_1=1$ 成立，$a_3-a_2a_1=1$ 成立，$a_4-a_3a_2a_1=8-1\times2\times3=8-6=2\neq1$ 不成立，

所以 $1,2,3,8,49$ 不是"$H(1)$ 数列".

（2）由 $\{a_n\}$ 是首项为 2 的"$H(t)$ 数列"，则 $a_2=2+t$，$a_3=3t+4$，

由 $\{b_n\}$ 是等比数列，设公比为 q，

由 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=a_1a_2a_3\cdots a_n+\log_2 b_n$，

则 $\sum\limits_{i=1}^{n+1}a_i^2=a_1a_2a_3\cdots a_na_{n+1}+\log_2 b_{n+1}$，

两式作差可得 $a_{n+1}^2=a_1a_2a_3\cdots a_n(a_{n+1}-1)+\log_2 b_{n+1}-\log_2 b_n$，

即 $a_{n+1}^2=a_1a_2a_3\cdots a_n(a_{n+1}-1)+\log_2 q$

由 $\{a_n\}$ 是"$H(t)$ 数列"，则 $a_{n+1}-a_1a_2a_3\cdots a_n=t$，对于 $n\geq1, n\in\mathbf{N}$ 恒成立，

所以 $a_{n+1}^2=(a_{n+1}-t)(a_{n+1}-1)+\log_2 q$，

即 $(t+1)a_{n+1}=t+\log_2 b_{n+1}-\log_2 b_n$ 对于 $n\geq1, n\in\mathbf{N}$ 恒成立，

则 $\begin{cases}(t+1)a_2-t=\log_2 q\\(t+1)a_3-t=\log_2 q\end{cases}$，即 $\begin{cases}(t+1)(2+t)-t=\log_2 q\\(t+1)(3t+4)-t=\log_2 q\end{cases}$，

解得，$t=-1$，$q=2$，

又由 $a_1=2$，$a_1^2=a_1+\log_2 b_1$，则 $b_1=4$，即 $b_n=2^{n+1}$

故所求的 $t=-1$，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n=2^{n+1}$

（3）设函数 $f(x)=\ln x-x+1$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$，令 $f'(x)=0$，

解得 $x=1$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，

则 $f(x)=\ln x-x+1$ 在区间 $(1,+\infty)$ 单调递减，

且 $f(1)=\ln1-1+1=0$，

又由 $\{a_n\}$ 是"$H(t)$ 数列"，

即 $a_{n+1}-a_1a_2a_3\cdots a_n=t$，对于$n\geq1,n\in\mathbf{N}$恒成立，

因为$a_1>1,t>0$，则$a_2=a_1+t>1$，

再结合$a_1>1,t>0,a_2>1$，

反复利用$a_{n+1}=a_1a_2a_3\cdots a_n+t$，

可得对于任意的$n\geq1,n\in\mathbf{N}$，$a_n>1$，

则$f(a_n)<f(1)=0$，

即$\ln a_n-a_n+1<0$，则$\ln a_n<a_n-1$，

即$\ln a_1<a_1-1$，$\ln a_2<a_2-1$，L，$\ln a_n<a_n-1$，

相加可得$\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n<a_1+a_2+\cdots+a_n-n$，

则$\ln(a_1a_2\cdots a_n)<S_n-n$，

又因为$y=\ln x$在$x\in(0,+\infty)$上单调递增，

所以$a_1a_2\cdots a_n<\mathrm{e}^{S_n-n}$，

又$a_{n+1}-a_1a_2a_3\cdots a_n=t$，所以$a_{n+1}-t<\mathrm{e}^{S_n-n}$，

即$S_{n+1}-S_n-t<\mathrm{e}^{S_n-n}$，

故$t>S_{n+1}-S_n-\mathrm{e}^{S_n-n}$.

【点睛】关键点睛：本题主要数列的新定义题型，紧扣题意进行求解，同时构造函数，利用导数判断单调是证明不等式的关键.

三、导数的综合应用

14.（2023·上海崇明·统考一模）若存在实数a,b，对任意实数$x\in[0,1]$，使得不等式$x^3-m\leqslant ax+b\leqslant x^3+m$恒成立，则实数$m$的取值范围是（　　）

A. $\left[\frac{\sqrt{3}}{9},+\infty\right)$　　B. $\left[\frac{8\sqrt{3}}{9},+\infty\right)$　　C. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$　　D. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$

【答案】A

【分析】不等式$x^3-m\leq ax+b\leq x^3+m$等价于$\left|-x^3+ax+b\right|\leq m$，原命题等价于存在实数$a$，$b$，对任意实

数 $x\in[0,1]$ 不等式 $\left|-x^3+ax+b\right|\le m$ 恒成立，等价于存在实数 a，b，不等式 $\left|-x^3+ax+b\right|_{\max}\le m$ 成立，分别讨论 $a\le 0$，$0<a\le 1$，$1<a<3$，$a\ge 3$ 的情况，先求出 $\left|-x^3+ax+b\right|_{\max}$，再求出 $\left(\left|-x^3+ax+b\right|_{\max}\right)_{\min}$ 即可解决问题.

【详解】不等式 $x^3-m\le ax+b\le x^3+m$ 等价于 $-m\le -x^3+ax+b\le m$ 即 $\left|-x^3+ax+b\right|\le m$，

原命题等价于存在实数 a，b，对任意实数 $x\in[0,1]$ 不等式 $\left|-x^3+ax+b\right|\le m$ 恒成立，

等价于存在实数 a，b，不等式 $\left|-x^3+ax+b\right|_{\max}\le m$ 成立，

记 $f(x)=-x^3+ax+b$，则 $f'(x)=-3x^2+a$，

（1）当 $a\le 0$ 时，对任意 $x\in[0,1]$，$f'(x)\le 0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减 $a+b-1\le f(x)\le b$

①当 $a+b-1+b\ge 0$，即 $b\ge\dfrac{1-a}{2}$ 时，$\left|f(x)\right|_{\max}=b$，

②当 $a+b-1+b<0$，即 $b<\dfrac{1-a}{2}$ 时，$\left|f(x)\right|_{\max}=-a-b+1$，

从而当 $a\le 0$ 时，$g(b)=\begin{cases}b & ,b\ge\dfrac{1-a}{2}\\ -a-b+1 & ,b<\dfrac{1-a}{2}\end{cases}$，

则 $g(b)$ 在 $(-\infty,\dfrac{1-a}{2})$ 上单调递减，在 $\left[\dfrac{1-a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(b)_{\min}=g(\dfrac{1-a}{2})=\dfrac{1-a}{2}\ge\dfrac{1}{2}$；

（2）当 $0<a<3$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{\dfrac{a}{3}}$，

$f(x)$ 在区间 $\left[0,\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\sqrt{\dfrac{a}{3}},1\right]$ 上单调递减，

$f(0)=b$，$f\left(\sqrt{\dfrac{a}{3}}\right)=\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}+b$，$f(1)=a+b-1$，

①当 $0<a\le 1$ 时 $a+b-1\le b$，此时 $a+b-1\le f(x)\le\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}+b$，

$\alpha)$ 当 $a+b-1+\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}+b<0$ 即 $b<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ 时，$\left|f(x)\right|_{\max}=-a-b+1$，

$\beta)$ 当 $a+b-1+\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}+b\ge 0$ 即 $b\ge\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ 时，$\left|f(x)\right|_{\max}=\dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}+b$，

从而当 $0<a\le 1$ 时，$g(b)=\begin{cases}-2a-b+8 & ,b<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}\\ \dfrac{2a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}+b & ,b\ge\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{a}{3}\sqrt{\dfrac{a}{3}}\end{cases}$，

则 $g(b)$ 在区间 $\left(-\infty,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(b)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-\frac{a}{6}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{a}{2}+\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$；

令 $t=\sqrt{\frac{a}{3}}$，则 $0<t\le\sqrt{\frac{1}{3}}$，$g(b)_{\min}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t^2+t^3$，记 $h(t)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}t^2+t^3$，

则 $h'(t)=3t^2-3t)=3t(t-1)$，

当 $\left(0,\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ 时，$h'(t)<0$ 恒成立，

即 $h(t)$ 在区间 $\left(0,\sqrt{\frac{1}{3}}\right]$ 上单调递减，即 $h(t)_{\min}=h\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{9}$，

即 $g(b)_{\min}\ge\frac{\sqrt{3}}{9}$；

②当 $1<a<3$ 时 $a+b-1>b$，此时 $b\le f(x)\le\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b$，

α) 当 $b+\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b<0$ 即 $b<-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$ 时，$|f(x)|_{\max}=-b$，

β) 当 $b+\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b\ge0$ 即 $b\ge-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$ 时，$|f(x)|_{\max}=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b$，

从而当 $1<a<3$ 时，$g(b)=\begin{cases}-b & ,b<-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\\ \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}+b & ,b\ge-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\end{cases}$，

则 $g(b)$ 在区间 $\left(-\infty,-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left[-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(b)_{\min}=g\left(-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}>\frac{\sqrt{3}}{9}$；

（3）当 $a\ge3$ 时，对任意 $x\in[0,1]$，$f'(x)\ge0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

$b\le f(x)\le a+b-1$

①当 $a+b-1+b\ge0$，即 $b\ge\frac{1-a}{2}$ 时，$|f(x)|_{\max}=a+b-1$，

②当 $a+b-1+b<0$，即 $b<\frac{1-a}{2}$ 时，$|f(x)|_{\max}=-b$，

从而当 $a\ge3$ 时，$g(b)=\begin{cases}2a+b-8, & b\ge\frac{1-a}{2}\\ -b & ,b<\frac{1-a}{2}\end{cases}$，

则 $g(b)$ 在 $(-\infty,\frac{1-a}{2})$ 上单调递减，在 $\left[\frac{1-a}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(b)_{\min}=g(\frac{1-a}{2})=\frac{a-1}{2}\geq 1$；

综上所述，$g(b)_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{9}$，

所以 $m\geq\frac{\sqrt{3}}{9}$.

故选：A

【点睛】结论点睛：本题考查不等式的恒成立与有解问题，可按如下规则转化：

一般地，已知函数 $y=f(x),x\in[a,b]$，$y=g(x),x\in[c,d]$

（1）若 $\forall x_1\in[a,b]$，$\forall x_2\in[c,d]$，总有 $f(x_1)<g(x_2)$ 成立，故 $f(x_1)_{\max}<g(x_2)_{\min}$；

（2）若 $\forall x_1\in[a,b]$，$\exists x_2\in[c,d]$，有 $f(x_1)<g(x_2)$ 成立，故 $f(x_1)_{\max}<g(x_2)_{\max}$；

（3）若 $\exists x_1\in[a,b]$，$\exists x_2\in[c,d]$，有 $f(x_1)<g(x_2)$ 成立，故 $f(x_1)_{\min}<g(x_2)_{\min}$；

（4）若 $\forall x_1\in[a,b]$，$\exists x_2\in[c,d]$，有 $f(x_1)=g(x_2)$，则 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 值域的子集 .

15．（2023·上海普陀·统考一模）设函数 $f(x)=ae^x-2x^2$，若对任意 $x_0\in(0,1)$，皆有

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-x+x_0}{x-x_0}>0$ 成立，则实数 a 的取值范围是______.

【答案】$\left(4e^{-\frac{3}{4}},+\infty\right)$

【分析】根据导数的几何意义转化为 $f'(x)-1>0$ 对任意 $x\in(0,1)$ 恒成立，再代入 $f'(x)=ae^x-4x$，利用分离参数法即可得到答案.

【详解】$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-x+x_0}{x-x_0}>0$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-(x-x_0)}{x-x_0}>0$,

即 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-1>0$，即 $f'(x)-1>0$ 对任意 $x\in(0,1)$ 恒成立，

$f'(x)=ae^x-4x$，即 $ae^x-4x-1>0$ 对任意 $x\in(0,1)$ 恒成立，

$a>\frac{4x+1}{e^x}$ 对任意 $x\in(0,1)$ 恒成立，则 $a>\left(\frac{4x+1}{e^x}\right)_{\max}$，

设 $h(x)=\frac{4x+1}{e^x}$，则 $h'(x)=\frac{3-4x}{e^x}$，令 $h'(x)=\frac{3-4x}{e^x}=0$，解得 $x=\frac{3}{4}$，

当 $x\in\left(0,\frac{3}{4}\right)$ 时，$h'(x)>0$，此时 $h(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\frac{3}{4},1\right)$ 时，$h'(x)<0$，此时 $h(x)$ 单调递减，

则 $h(x)_{\max}=h\left(\frac{3}{4}\right)=4\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}}$，则 $a\in\left(4\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}},+\infty\right)$，

故答案为：$\left(4\mathrm{e}^{-\frac{3}{4}},+\infty\right)$.

16．（2023·上海杨浦·统考一模）设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$x\in\mathbf{R}$.

(1)求方程 $(f(x))^2=f(x)+2$ 的实数解；

(2)若不等式 $x+b\le f(x)$ 对于一切 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，求实数 b 的取值范围.

【答案】(1) $\ln 2$

(2) $b\le 1$

【分析】（1）转化为关于 e^x 的一元二次方程求解即可；

（2）分离参数后，构造函数，利用导数求函数的最小值即可得解.

【详解】（1）由 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 知，方程 $(f(x))^2=f(x)+2$ 为 $(\mathrm{e}^x)^2=\mathrm{e}^x+2$，

即 $(\mathrm{e}^x-2)(\mathrm{e}^x+1)=0$，

解得 $\mathrm{e}^x=2$，即 $x=\ln 2$.

（2）不等式 $x+b\le f(x)$ 即 $x+b\le\mathrm{e}^x$，

原不等式可化为 $b\le\mathrm{e}^x-x$ 对于一切 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，

令 $g(x)=\mathrm{e}^x-x$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x-1$，

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，当 $x<0$ 时，$g'(x)<0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递减，在 $(0,+\infty)$ 上递增，

故当 $x=0$ 时，$(x)_{\min}=g(0)=1$，

所以 $b\le 1$.

17．（2023·上海嘉定·统考一模）已知 $f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x},g(x)=\frac{\ln x}{x}$.

(1)求函数 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 的单调区间和极值；

(2)请严格证明曲线 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 有唯一交点；

(3)对于常数 $a\in\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，若直线 $y=a$ 和曲线 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 共有三个不同交点 (x_1,a)、(x_2,a)、(x_3,a)，其

中 $x_1<x_2<x_3$，求证：x_1、x_2、x_3 成等比数列.

【答案】(1)答案见解析

(2)证明过程见解析

(3)证明过程见解析

【分析】（1）根据导数的性质，结合极值的定义进行求解即可；

（2）构造新函数利用导数的性质，结合函数零点存在原理进行求解即可；

（3）根据题意得到 $\frac{x_1}{e^{x_1}}=\frac{x_2}{e^{x_2}}=\frac{\ln x_2}{x_2}=\frac{\ln x_3}{x_3}=a$，结合（1）中结论、等比数列的定义进行运算证明即可.

【详解】（1）由题意可知：$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}, g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $f'(x)>0$ 时，得 $x<1$，此时函数 $y=f(x)$ 单调递增，

当 $f'(x)<0$ 时，得 $x>1$，此时函数 $y=f(x)$ 单调递减，

因此函数 $y=f(x)$ 极大值为 $f(1)=\frac{1}{e}$，

单调递增区间为 $(-\infty,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$；

当 $g'(x)>0$ 时，得 $0<x<e$，此时函数 $y=g(x)$ 单调递增，

当 $g'(x)<0$ 时，得 $x>e$，此时函数 $y=g(x)$ 单调递减，

因此函数 $y=g(x)$ 极大值为 $g(e)=\frac{1}{e}$，

单调递增区间为 $(0,e)$，单调递减区间为 $(e,+\infty)$，

所以函数 $y=f(x)$ 极大值为 $\frac{1}{e}$，单调递增区间为 $(-\infty,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$；

函数 $y=g(x)$ 极大值为 $\frac{1}{e}$，单调递增区间为 $(0,e)$，单调递减区间为 $(e,+\infty)$.

（2）设 $m(x)=f(x)-g(x)=\frac{x}{e^x}-\frac{\ln x}{x}=\frac{x^2-e^x\ln x}{xe^x}, x\in(0,+\infty)$，

设 $h(x)=x^2-e^x\ln x \Rightarrow h'(x)=2x-e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$，

设 $\varphi(x)=\ln x+\frac{1}{x} \Rightarrow \varphi'(x)=\frac{x-1}{x^2}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)<0, \varphi(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0, \varphi(x)$ 单调递增，

所以$\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=1\Rightarrow \ln x+\dfrac{1}{x}\geq 1$，

设$n(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x\Rightarrow n'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$，

当$x\in(0,1)$时，$n'(x)<0,n(x)$单调递减，

当$x\in(1,+\infty)$时，$n'(x)>0,n(x)$单调递增，

所以$n(x)_{\min}=n(1)=0\Rightarrow \mathrm{e}^x\geq \mathrm{e}x$，

因此有$\mathrm{e}^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)\geq \mathrm{e}x$，当$x=1$时取等号，

于是有$h'(x)=2x-\mathrm{e}^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)\leq 2x-\mathrm{e}x=x(2-\mathrm{e})<0$，

因此$h(x)$单调递减，而$h(1)=1,h(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{\mathrm{e}}<0\Rightarrow h(1)h(\mathrm{e})<0$，

根据函数零点存在原理，当$x\in(0,+\infty)$时，函数$h(x)$在$(1,\mathrm{e})$内有唯一零点，

因此$m(x)=f(x)-g(x)=0$有唯一实根，因此曲线$y=f(x)$、$y=g(x)$有唯一交点.

（3）由（1）可知两个函数的最大值均为$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

且函数$y=f(x)$单调递增区间为$(-\infty,1)$，单调递减区间为$(1,+\infty)$；

函数$y=g(x)$单调递增区间为$(0,\mathrm{e})$，单调递减区间为$(\mathrm{e},+\infty)$，

由（2）可知曲线$y=f(x)$、$y=g(x)$有唯一交点，且交点在$(1,\mathrm{e})$内，

因为直线$y=a$和曲线$y=f(x)$、$y=g(x)$共有三个不同交点(x_1,a)、(x_2,a)、(x_3,a)，其中$x_1<x_2<x_3$，

因此两条曲线必过两个曲线的交点，

所以有$0<x_1<1<x_2<\mathrm{e}<x_3$，

因此有$\dfrac{x_1}{\mathrm{e}^{x_1}}=\dfrac{x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}=\dfrac{\ln x_2}{x_2}=\dfrac{\ln x_3}{x_3}=a\Rightarrow x_1x_3=\mathrm{e}^{x_1}\ln x_3$，

因为$\dfrac{x_1}{\mathrm{e}^{x_1}}=\dfrac{\ln \mathrm{e}^{x_1}}{\mathrm{e}^{x_1}}=\dfrac{\ln x_2}{x_2}$，$\mathrm{e}^{x_1},x_2\in(0,\mathrm{e})$，$y=g(x)$在$(0,\mathrm{e})$上单调递增，

所以有$\mathrm{e}^{x_1}=x_2$，

同理$\dfrac{x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}=\dfrac{\ln \mathrm{e}^{x_2}}{\mathrm{e}^{x_2}}=\dfrac{\ln x_3}{x_3}$，$\mathrm{e}^{x_2},x_3\in(\mathrm{e},+\infty)$，而函数$y=g(x)$在$(\mathrm{e},+\infty)$单调递减，

所以有$\mathrm{e}^{x_2}=x_3$，而$x_1x_3=\mathrm{e}^{x_1}\ln x_3$，所以$x_1x_3=x_2\cdot x_2=x_2^2$，

因此 x_1、x_2、x_3 成等比数列.

【点睛】关键点睛：本题的关键是利用构造新函数，利用导数的性质、结合放缩法进行运算证明.

18.（2023·上海宝山·统考一模）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x$，$g(x)=\mathrm{e}^{-x}+x$，其中 e 为自然对数的底数.

(1)求函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)设函数 $F(x)=af(x)-g(x)$，

①若 $a=\mathrm{e}$，求函数 $y=F(x)$ 的单调区间，并写出函数 $y=F(x)-m$ 有三个零点时实数 m 的取值范围；

②当 $0<a<1$ 时，x_1、x_2 分别为函数 $y=F(x)$ 的极大值点和极小值点，且不等式 $F(x_1)+tF(x_2)>0$ 对任意 $a\in(0,1)$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

【答案】(1) $y=(\mathrm{e}-1)x$；

(2)①单调区间见解析，$(\mathrm{e}-1,2)$，②$(-\infty,-1]$.

【分析】（1）求出函数 $f(x)$ 的导数，利用导数的几何意义求出切线方程即得.

（2）①把 $a=\mathrm{e}$ 代入，求出 $F(x)$ 的导数 $F'(x)$，确定 $F'(x)>0,F'(x)<0$ 的解集得单调区间，结合极大值、极小值求出 m 的范围；②由导数求出 x_1,x_2，构造函数 $\varphi(a)=F(x_1)+tF(x_2)$ 并借助导数探讨不等式恒成立即可.

【详解】（1）函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x$，求导得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$，得 $f'(1)=\mathrm{e}-1$，而 $f(1)=\mathrm{e}-1$，

所以切线方程为 $y-(\mathrm{e}-1)=(\mathrm{e}-1)(x-1)$，即 $y=(\mathrm{e}-1)x$.

（2）函数 $F(x)=a(\mathrm{e}^x-x)-\mathrm{e}^{-x}-x$ 的定义域为 R，求导得 $F'(x)=a(\mathrm{e}^x-1)+\mathrm{e}^{-x}-1=\dfrac{(a\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x}$，

①当 $a=\mathrm{e}$ 时，$F(x)=\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}x-\mathrm{e}^{-x}-x$，$F'(x)=\dfrac{(\mathrm{e}^{x+1}-1)(\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x}$，由 $F'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=0$，

当 $x<-1$ 或 $x>0$ 时，$F'(x)>0$，当 $-1<x<0$ 时，$F'(x)<0$，

因此函数 $F(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$，单调减区间为 $(-1,0)$；

极大值 $F(-1)=2$，极小值 $F(0)=\mathrm{e}-1$，

又 $F(1)=\mathrm{e}^2-\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1=\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1>\dfrac{3}{2}\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1>4-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1>2$，

$F(-2)=\mathrm{e}^{-1}+2\mathrm{e}-\mathrm{e}^2+2=(\mathrm{e}-1)+(\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}+3-\mathrm{e}^2)<\mathrm{e}-1$，

所以函数 $y=F(x)-m$ 有三个零点时 m 的取值范围为 $(\mathrm{e}-1,2)$.

②令 $F'(x)=0$，得 $\mathrm{e}^x=1$ 或 $\mathrm{e}^x=\dfrac{1}{a}>1$，解得 $x=0$ 或 $x=\ln\dfrac{1}{a}=-\ln a>0$，

当 $x<0$ 或 $x>-\ln a$ 时，$F'(x)>0$，当 $0<x<-\ln a$ 时，$F'(x)<0$，

即函数 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,-\ln a)$ 上单调递减，

因此当 $x=0$ 时，$F(x)$ 取得极大值，当 $x=-\ln a$ 时，$F(x)$ 取得极小值，即有 $x_1=0,x_2=-\ln a$，

而 $F(x_1)=F(0)=a-1<0$，$F(x_2)=F(-\ln a)=a(\dfrac{1}{a}+\ln a)-a+\ln a=(a+1)\ln a+1-a<F(x_1)<0$，

又不等式 $F(x_1)+tF(x_2)>0$ 对任意 $a\in(0,1)$ 恒成立，于是 $t<0$，

设 $\varphi(a)=F(x_1)+tF(x_2)=a-1+t[(a+1)\ln a+1-a],a\in(0,1)$，

显然 $\varphi(1)=0$，$\varphi'(a)=1+t(\ln a+\dfrac{a+1}{a}-1)=1+t(\ln a+\dfrac{1}{a}),a\in(0,1)$，

令 $m(a)=\ln a+\dfrac{1}{a},a\in(0,1)$，求导得 $m'(a)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{a-1}{a^2}<0$，

则函数 $m(a)$ 在 $(0,1)$ 上严格递减，有 $m(a)>m(1)=1$，

当 $t\le-1$ 时，$\varphi'(a)\le1-(\ln a+\dfrac{1}{a})<0$，则有函数 $\varphi(a)$ 在 $(0,1)$ 上严格递减，$\varphi(a)>\varphi(1)=0$，符合题意；

当 $-1<t<0$ 时，存在 $a_0\in(0,1)$，使得 $\varphi'(a_0)=0$，当 $0<a<a_0$ 时，$\varphi'(a)<0$，当 $a_0<a<1$ 时，$\varphi'(a)>0$，

因此函数 $\varphi(a)$ 在 $(a_0,1)$ 上严格递增，有 $\varphi(a)<\varphi(1)=0$，不符合题意，

所以实数 t 的取值范围为 $(-\infty,-1]$.

【点睛】思路点睛：不等式恒成立或存在型问题，可构造函数，利用导数研究函数的单调性，求出最值，进而得出相应的含参不等式，从而求出参数的取值范围；也可分离变量，构造函数，直接把问题转化为函数的最值问题.

19．（2023·上海闵行·统考一模）已知 $a\in\mathbf{R}$，$f(x)=(a-2)x^3-x^2+5x+(1-a)\ln x$.

(1)若1为函数 $y=f(x)$ 的驻点，求实数 a 的值；

(2)若 $a=0$，试问曲线 $y=f(x)$ 是否存在切线与直线 $x-y-1=0$ 互相垂直？说明理由；

(3)若 $a=2$，是否存在等差数列 x_1、x_2、x_3 $(0<x_1<x_2<x_3)$，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_2,f(x_2))$ 处的切线与过两点 $(x_1,f(x_1))$、$(x_3,f(x_3))$ 的直线互相平行？若存在，求出所有满足条件的等差数列；若不存在，说明理由.

【答案】(1) $a=1$

(2)存在，理由见解析

(3)不存在，理由见解析

【分析】（1）由已知可得出 $f'(1)=0$，可求得 a 的值；

（2）由 $f'(x)=-1$ 变形可得 $6x^3+2x^2-6x-1=0$，利用零点存在定理判断出函数 $g(x)=6x^3+2x^2-6x-1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上存在零点，即可得出结论；

（3）假设存在满足条件的等差数列 x_1、x_2、x_3 $(0<x_1<x_2<x_3)$ 符合题意，根据导数的几何意义可得出 $f'(x_2)=\dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$，整理可得即 $\ln\dfrac{x_3}{x_1}-\dfrac{2\left(\dfrac{x_3}{x_1}-1\right)}{\dfrac{x_3}{x_1}+1}=0$，令 $t=\dfrac{x_3}{x_1}>1$，设 $h(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，利用导数分析函数 $h(t)$ 的单调性，由此分析函数 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上函数值的符号，即可得出结论.

【详解】（1）因为 $f(x)=(a-2)x^3-x^2+5x+(1-a)\ln x$，其中 $x>0$，

则 $f'(x)=3(a-2)x^2-2x+5+\dfrac{1-a}{x}$，

因为1为函数 $y=f(x)$ 的驻点，则 $f'(1)=3(a-2)+3+1-a=2a-2=0$，可得 $a=1$，

所以1为函数 $y=f(x)$ 的驻点时 $a=1$.

（2）当 $a=0$ 时，$f(x)=-2x^3-x^2+5x+\ln x$，则 $f'(x)=-6x^2-2x+5+\dfrac{1}{x}$，

令 $f'(x)=-6x^2-2x+5+\dfrac{1}{x}=-1$，整理可得 $6x^3+2x^2-6x-1=0$，

令 $g(x)=6x^3+2x^2-6x-1$，因为 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}-4<0$，$g(1)=8-7>0$，

且函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，由零点存在定理可知，存在 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $g(x_0)=0$，

即方程 $6x^3+2x^2-6x-1=0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时有实根，

故当 $a=0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 上存在切线与直线 $x-y-1=0$ 互相垂直.

（3）当 $a=2$ 时，$f(x)=-x^2+5x-\ln x$，则 $f'(x)=-2x+5-\dfrac{1}{x}$，

假设存在等差数列 x_1、x_2、x_3 $(0<x_1<x_2<x_3)$，

使得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_2,f(x_2))$ 处的切线与过两点 $(x_1,f(x_1))$、$(x_3,f(x_3))$ 的直线互相平行，

则 $f'(x_2)=-2x_2+5-\dfrac{1}{x_2}=-(x_1+x_3)+5-\dfrac{2}{x_1+x_3}$，

过两点$(x_1,f(x_1))$、$(x_3,f(x_3))$的直线的斜率为$k=\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}=\frac{(-x_3^2+5x_3-\ln x_3)-(-x_1^2+5x_1-\ln x_1)}{x_3-x_1}$

$=-(x_3+x_1)+5-\frac{\ln x_3-\ln x_1}{x_3-x_1}$，

令$k=f'(x_2)$，即$=-(x_3+x_1)+5-\frac{\ln x_3-\ln x_1}{x_3-x_1}=-(x_1+x_3)+5-\frac{2}{x_1+x_3}$，

可得$\ln\frac{x_3}{x_1}-\frac{2(x_3-x_1)}{x_3+x_1}=0$，即$\ln\frac{x_3}{x_1}-\frac{2\left(\frac{x_3}{x_1}-1\right)}{\frac{x_3}{x_1}+1}=0$，

令$t=\frac{x_3}{x_1}>1$，设$h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$，则$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

所以，函数$h(t)$在$(1,+\infty)$上为增函数，则$h(t)>h(1)=0$，

故等式$\ln\frac{x_3}{x_1}-\frac{2\left(\frac{x_3}{x_1}-1\right)}{\frac{x_3}{x_1}+1}=0$不成立，

因此，不存在等差数列x_1、x_2、x_3（$0<x_1<x_2<x_3$），

使得曲线$y=f(x)$在点$(x_2,f(x_2))$处的切线与过两点$(x_1,f(x_1))$、$(x_3,f(x_3))$的直线互相平行.

【点睛】方法点睛：利用导数证明不等式问题，方法如下：

（1）直接构造函数法：证明不等式$f(x)>g(x)$（或$f(x)<g(x)$）转化为证明$f(x)-g(x)>0$（或$f(x)-g(x)<0$），进而构造辅助函数$h(x)=f(x)-g(x)$；

（2）适当放缩构造法：一是根据已知条件适当放缩；二是利用常见放缩结论；

（3）构造“形似”函数，稍作变形再构造，对原不等式同解变形，根据相似结构构造辅助函数.

20.（2023上·上海虹口·高三统考期末）已知$y=f(x)$与$y=g(x)$都是定义在$(0,+\infty)$上的函数，若对任意x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，当$x_1<x_2$时，都有$g(x_1)\le\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\le g(x_2)$，则称$y=g(x)$是$y=f(x)$的一个“控制函数”.

(1)判断$y=2x$是否为函数$y=x^2(x>0)$的一个控制函数，并说明理由；

(2)设$f(x)=\ln x$的导数为$f'(x)$，$0<a<b$，求证：关于x的方程$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x)$在区间$(a,b)$上有实数解；

(3)设$f(x)=x\ln x$，函数$y=f(x)$是否存在控制函数？若存在，请求出$y=f(x)$的控制函数；若不存在，请说明理由.

【答案】(1)是，理由见解析

(2)证明见解析

(3)存在，$y=\ln x$

【分析】（1）根据已知控制函数的定义，即可得出结论；

（2）设 $y=\ln x-x+1$，$x>0$，由其导数得出其在 $x>0$ 上的最大值为 0，则 $\ln\frac{b}{a}-\frac{b}{a}+1<0$，$\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{b}+1<0$，变形化简得出 $\frac{1}{b}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{1}{a}$，而 $f'(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 (a,b) 上的值域为 $\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right)$，即可证明；

（3）由上面两问可看出控制函数可能是原函数的导数，证明 $\ln x_1<\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\ln x_2$，根据不等式的运算可以证明，发现控制函数可能是原函数的导数去掉常数项.

【详解】（1）对任意 $0<x_1<x_2$，则 $\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2}=x_1+x_2$，且 $2x_1\le x_1+x_2\le 2x_2$，

故 $y=2x$ 是函数 $y=x^2(x>0)$ 的一个控制函数；

（2）因为 $0<a<b$，则 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}$，

则 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{1}{a}=\frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}-\frac{1}{a}$，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-\frac{1}{b}=\frac{\ln\frac{a}{b}}{a-b}-\frac{1}{b}$

$\because 0<a<b$，$\therefore \frac{b}{a}>1$，$0<\frac{b}{a}<1$

设 $y=\ln x-x+1$，$x>0$

在 $x>1$ 上 $y'=\frac{1}{x}-1<0$，在 $0<x<1$ 上 $y'=\frac{1}{x}-1>0$，

则 $y=\ln x-x+1$ 在 $x>1$ 单调递减，在 $0<x<1$ 上单调递增，

最大值 $y_{\max}=\ln 1-1+1=0$，

$\because 0<a<b$，$\therefore \frac{b}{a}>1$，$0<\frac{b}{a}<1$，$b-a>0$，$a-b<0$，

$\therefore \ln\frac{b}{a}-\frac{b}{a}+1<0$，$\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{b}+1<0$，

则 $\ln\frac{b}{a}-\frac{b-a}{a}<0$，

$\because b-a>0$

$\therefore \frac{\ln\frac{b}{a}}{b-a}-\frac{1}{a}<0$，即 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{1}{a}$，

同理，$\ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{b}<0$，

Q $a-b<0$

$\therefore \ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{b}>0$，即 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{1}{b}$

综上：$\frac{1}{b}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\frac{1}{a}$，

$f'(x)=\frac{1}{x}$，在区间 (a,b) 上的值域为 $\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right)$，

则 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x)$ 在区间 (a,b) 上有实数解.

（3）$f(x)=x\ln x$，则 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}$，其中 $0<x_1<x_2$

$\frac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}-\ln x_1$，

$=\frac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}-\frac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_1}{x_1-x_2}$，

$=\frac{-x_2\ln x_2+x_2\ln x_1}{x_1-x_2}=\frac{x_2\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$，

$\because 0<x_1<x_2$，$\therefore 0<\frac{x_1}{x_2}<1, x_1-x_2<0$，

$\therefore \ln\frac{x_1}{x_2}<0$，则 $\frac{x_2\ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}>0$，即 $\frac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}>\ln x_1$，

同理 $\frac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}<\ln x_2$，

即 $\ln x_1<\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\ln x_2$，

则 $y=\ln x$ 是 $y=f(x)$ 的一个控制函数.

【点睛】关键点睛：对于函数的新定义题要理解好定义的内容，不等式运算时注意不等式的要求，变号时要多注意，一般的大题在前面的问题和后面的问题有联系，后面的问题没有思路时看看前面的问题，

21.（2023 上·上海松江·高三统考期末）已知函数 $y=f(x)$，记 $f(x)=x+\sin x$，$x\in D$.

(1)若 $D=[0,2\pi]$，判断函数的单调性；

(2)若 $D=\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，不等式 $f(x)>kx$ 对任意 $x\in D$ 恒成立，求实数 k 的取值范围；

(3)若 $D=\mathrm{R}$，则曲线 $y=f(x)$ 上是否存在三个不同的点 A,B,C，使得曲线 $y=f(x)$ 在 A,B,C 三点处的切线互相重合？若存在，求出所有符合要求的切线的方程；若不存在，请说明理由.

【答案】(1)函数 $y=f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上是增函数

(2) $k<\frac{2}{\pi}+1$

(3)存在，满足条件的切线方程为 $y=x\pm 1$

【分析】（1）利用导数判断出 $f(x)$ 在区间 $\left[0,2\pi\right]$ 上的单调性.

（2）由 $f(x)>kx$ 分离参数 k，然后利用构造函数法，结合多次求导来求得 k 的取值范围.

（3）先设出切线方程，然后根据切线重合列方程，由此进行分类讨论来求得切线方程.

【详解】（1）因为 $f'(x)=1+\cos x\geq 0$，当且仅当在 $x=\pi$ 时，$f'(x)=0$，

所以函数 $y=f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上是增函数.

（2）由题意得，$(k-1)x<\sin x$，于是 $k-1<\frac{\sin x}{x}$.

令 $h(x)=\frac{\sin x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，

令 $u(x)=x\cos x-\sin x$，则 $u'(x)=-x\sin x<0, x\in(0,\frac{\pi}{2}]$，

所以 $u(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上是严格减函数，于是 $u(x)<u(0)=0, x\in(0,\frac{\pi}{2}]$，

由于 $h'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0, x\in(0,\frac{\pi}{2}]$，于是 $h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上是严格减函数，

所以 $h_{\min}(x)=h(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{\pi}$，因此 $k-1<\frac{2}{\pi}$，即 $k<\frac{2}{\pi}+1$.

（3）解法一：

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，则曲线在 A,B,C 三点处的切线分别为直线

$l_1: y=(1+\cos x_1)x-x_1\cos x_1+\sin x_1$，

$l_2: y=(1+\cos x_2)x-x_2\cos x_2+\sin x_2$，

$l_3: y=(1+\cos x_3)x-x_3\cos x_3+\sin x_3$.

因为直线 l_1,l_2,l_3 互相重合，所以 $\cos x_1=\cos x_2=\cos x_3$，

且 $-x_1\cos x_1+\sin x_1=-x_2\cos x_2+\sin x_2=-x_3\cos x_3+\sin x_3$.

因为 $\cos x_1=\cos x_2=\cos x_3$，

所以 $\sin x_1=\pm\sin x_2$，$\sin x_2=\pm\sin x_3$，$\sin x_3=\pm\sin x_1$.

①若 $\sin x_1=-\sin x_2$，$\sin x_2=-\sin x_3$，$\sin x_3=-\sin x_1$.

则 $\sin x_1=0$， $\sin x_2=0$， $\sin x_3=0$，

于是 $-x_1\cos x_1=-x_2\cos x_2=-x_3\cos x_3$，

因为 $\cos x_1=\cos x_2=\cos x_3=\pm1\neq 0$，

所以 $x_1=x_2=x_3$， 与 A,B,C 三点互不重合矛盾.

②若 $\sin x_1=\sin x_2$， $\sin x_2=\sin x_3$， $\sin x_3=\sin x_1$ 中至少一个成立，

不妨设 $\sin x_1=\sin x_2$ 成立， 则 $x_1\cos x_1=x_2\cos x_2$，

若 $\cos x_1=\cos x_2\neq 0$， 则 $x_1=x_2$， 矛盾， 舍去，

于是 $\cos x_1=\cos x_2=0$， $\sin x_1=\sin x_2=\pm1$，

所以满足要求的切线方程为 $y=x+1$ 或 $y=x-1$

解法 2：

假设存在三个不同点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上满足条件，

则 $y_1=x_1+\sin x_1,y_2=x_2+\sin x_2,y_3=x_3+\sin x_3$， 且 x_1,x_2,x_3 互不相同.

曲线 $y=f(x)$ 在 A,B,C 三点处的切线方程分别为：

$l_1: y=(1+\cos x_1)x+\sin x_1-x_1\cos x_1$，

$l_2: y=(1+\cos x_2)x+\sin x_2-x_2\cos x_2$，

$l_3: y=(1+\cos x_3)x+\sin x_3-x_3\cos x_3$，

依题意，有 $\begin{cases}\cos x_1=\cos x_2=\cos x_3 & ①\\ \sin x_1-x_1\cos x_1=\sin x_2-x_2\cos x_2=\sin x_3-x_3\cos x_3 & ②\end{cases}$

由①得， $x_2=2k\pi\pm x_1,x_3=2n\pi\pm x_1,k,n\in \mathrm{Z}$.

情形 1：若 $x_2=2k\pi+x_1,x_3=2n\pi+x_1,k,n\neq0,k\neq n$， 代入②得，

$\sin x_1-x_1\cos x_1=\sin x_1-(2k\pi+x_1)\cos x_1=\sin x_1-(2n\pi+x_1)\cos x_1$.

即 $\begin{cases}(2k\pi)\cos x_1=0\\(2n\pi)\cos x_1=0\end{cases}$， 而 $k,n\neq0$， 故 $\cos x_1=0$， $\sin x_1=\pm1$，

此时满足条件的切线方程为 $y=x\pm1$.

情形 2：若 $x_2=2k\pi-x_1,x_3=2n\pi-x_1,k\neq n$， 代入②得，

$\sin x_1 - x_1\cos x_1 = -\sin x_1 - (2k\pi - x_1)\cos x_1 = -\sin x_1 - (2n\pi - x_1)\cos x_1$.

即 $\begin{cases}\sin x_1 + (k\pi - x_1)\cos x_1 = 0\\ \sin x_1 + (n\pi - x_1)\cos x_1 = 0\end{cases}$，两式相减，

得 $(k-n)\pi\cdot\cos x_1 = 0$，由于 $k \neq n$，故 $\cos x_1 = 0$，

此时 $\sin x_1 = 0$，与 $\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1 = 1$ 矛盾，舍去.

情形 3：若 $x_2 = 2k\pi + x_1, x_3 = 2n\pi - x_1, k \neq 0$，代入②得，

$\sin x_1 - x_1\cos x_1 = \sin x_1 - (2k\pi + x_1)\cos x_1 = -\sin x_1 - (2n\pi - x_1)\cos x_1$.

即 $\begin{cases}(2k\pi)\cos x_1 = 0\\ \sin x_1 + (n\pi - x_1)\cos x_1 = 0\end{cases}$，故 $\cos x_1 = 0$，

则 $\sin x_1 = 0$，与 $\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1 = 1$ 矛盾，舍去.

情形 4：若 $x_2 = 2k\pi - x_1, x_3 = 2n\pi + x_1, n \neq 0$，与情形 3 完全类似，舍去.

综上，满足条件的切线方程为 $y = x \pm 1$.

解法 3：

假设存在三个不同点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 在曲线 $y = f(x)$ 上满足条件，

则 $y_1 = x_1 + \sin x_1, y_2 = x_2 + \sin x_2, y_3 = x_3 + \sin x_3$，且 x_1, x_2, x_3 互不相同.

曲线 $y = f(x)$ 在 A, B, C 三点处的切线方程分别为：

$l_1: y = (1+\cos x_1)x + \sin x_1 - x_1\cos x_1$，

$l_2: y = (1+\cos x_2)x + \sin x_2 - x_2\cos x_2$，

$l_3: y = (1+\cos x_3)x + \sin x_3 - x_3\cos x_3$，

依题意，有 $\begin{cases}\cos x_1 = \cos x_2 = \cos x_3 & ①\\ \sin x_1 - x_1\cos x_1 = \sin x_2 - x_2\cos x_2 = \sin x_3 - x_3\cos x_3 & ②\end{cases}$

由①得，$|\sin x_1| = |\sin x_2| = |\sin x_3|$，

由②，令 $\sin x_1 - x_1\cos x_1 = \sin x_2 - x_2\cos x_2 = \sin x_3 - x_3\cos x_3 = t$，

则 $\sin x_1 = t + x_1\cos x_1, \sin x_2 = t + x_2\cos x_2, \sin x_3 = t + x_3\cos x_3$，

即有 $|t + x_1\cos x_1| = |t + x_2\cos x_2| = |t + x_3\cos x_3|$，

平方，得

$t^2+2tx_1\cos x_1+x_1^2\cos^2 x_1=t^2+2tx_2\cos x_2+x_2^2\cos^2 x_2=t^2+2tx_3\cos x_3+x_3^2\cos^2 x_3$，

即$\begin{cases}(x_1^2-x_2^2)\cos^2 x_1+2t(x_1-x_2)\cos x_1=0\\(x_1^2-x_3^2)\cos^2 x_1+2t(x_1-x_3)\cos x_1=0\end{cases}$

由于x_1,x_2,x_3互不相同，即$\begin{cases}(x_1-x_2)\cos^2 x_1+2t\cos x_1=0\\(x_1-x_3)\cos^2 x_1+2t\cos x_1=0\end{cases}$，

相减，得$(x_2-x_3)\cos^2 x_1=0$，于是$\cos x_1=0$，则$\sin x_1=\pm1$，

此时满足条件的切线方程为$y=x\pm1$.

【点睛】求解函数单调区间的步骤：（1）确定$f(x)$的定义域；（2）计算导数$f'(x)$；（3）求出$f'(x)=0$的根；（4）用$f'(x)=0$的根将$f(x)$的定义域分成若干个区间，考查这若干个区间内$f'(x)$的符号，进而确定$f(x)$的单调区间：$f¢(x)>0$，则$f(x)$在对应区间上是增函数，对应区间为增区间；$f'(x)<0$，则$f(x)$在对应区间上是减函数，对应区间为减区间.如果导函数含有参数，则需要对参数进行分类讨论，分类讨论要做到不重不漏.

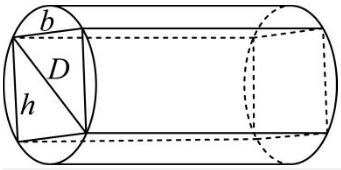
22．（2023·上海嘉定·统考一模）中国历史悠久，积累了许多房屋建筑的经验．房梁为柱体，或取整根树干而制为圆柱形状，或作适当裁减而制为长方体形状，例如下图所示．

材质确定的梁的承重能力取决于截面形状，现代工程科学常用抗弯截面系数W来刻画梁的承重能力．对于两个截面积相同的梁，称W较大的梁的截面形状更好．三种不同截面形状的梁的抗弯截面系数公式，如下表所列，

	圆形截面	正方形截面	矩形截面
条件	r为圆半径	a为正方形边长	h为矩形的长，b为矩形的宽，$h>b$
抗弯截面系数	$W_1=\frac{\pi}{4}r^3$	$W_2=\frac{1}{6}a^3$	$W_3=\frac{1}{6}bh^2$

(1)假设上表中的三种梁的截面面积相等，请问哪一种梁的截面形状最好？并具体说明；

(2)宋朝学者李诫在《营造法式》中提出了矩形截面的梁的截面长宽之比应定为$3:2$的观点．考虑梁取材于圆柱形的树木，设矩形截面的外接圆的直径为常数D，如下图所示，请问$h:b$为何值时，其抗弯截面系数取得最大值，并据此分析李诫的观点是否合理．



【答案】(1)矩形截面的梁的截面形状最好.

(2)答案见解析

【分析】（1）根据题意，得到$W_1=\frac{S\sqrt{S}}{4\sqrt{\pi}}$，$W_2=\frac{S\sqrt{S}}{6}$，$W_3=\frac{S}{6}h$，结合题意，得到$W_3>W_2>W_1$，得到结论；

（2）根据题意，得到$W_3=\frac{-b^3+D^2b}{6}(b>0)$，得到$W_3'=\frac{-b^2+D^2}{6}$，求得函数的单调性，求得$b=\frac{D}{\sqrt{3}}$时，$W_3$取得最大值，进而得到结论.

【详解】（1）解：假设截面面积均为正常数s，

可得$W_1=\frac{\pi}{4}r^3=\frac{S}{4}r=\frac{S}{4}\sqrt{\frac{S}{\pi}}=\frac{S\sqrt{S}}{4\sqrt{\pi}}$，$W_2=\frac{1}{6}a^3=\frac{S}{6}a=\frac{S\sqrt{S}}{6}$，$W_3=\frac{1}{6}bh^2=\frac{S}{6}h$，

所以$W_3=\frac{S}{6}\sqrt{h^2}>\frac{S}{6}\sqrt{bh}=\frac{S\sqrt{S}}{6}=W_2$，

又因为$3<\pi$，所以$6<4\sqrt{\pi}$，所以$W_2>W_1$，

综上，$W_3>W_2>W_1$，于是矩形截面的梁的截面形状最好.

（2）解：由$W_3=\frac{1}{6}bh^2=\frac{1}{6}b(D^2-b^2)=\frac{-b^3+D^2b}{6}(b>0)$，

可得$W_3'=\frac{-3b^2+D^2}{6}$，

可得

b	$b<\frac{D}{\sqrt{3}}$	$b=\frac{D}{\sqrt{3}}$	$b>\frac{D}{\sqrt{3}}$
W_3'	$W_3'>0$	$W_3'=0$	$W_3'<0$
W_3	↗	极大值	↘

所以，当$b=\frac{D}{\sqrt{3}}$时，W_3取得最大值，

此时，当$b=\frac{D}{\sqrt{3}}$，于是$h:b=\sqrt{2}:1\approx2.83:2$，

因为$h:b=3:2$的结论与抗弯系数理论的结论不同，但比较接近，是合理的，应肯定李诚从实践总总结的经验的实用价值，

考虑到所处的时代，从历史辩证的角度，其观点代表了我国古代在工程技术方面已经达到了较高的水平.