排列组合与二项式

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、排列组合

1．（2023上·上海虹口·高三统考期末）将甲、乙等8人安排在4天值班，若每天安排两人，则甲、乙两人安排在同一天的概率为________．（结果用分数表示）

2．（2023上·上海浦东新·高三统考期末）在100件产品中有90件一等品、10件二等品，从中随机抽取3件产品，则恰好含1件二等品的概率为____________（结果精确到0.01）.

3．（2023·上海长宁·统考一模）将4个人排成一排，若甲和乙必须排在一起，则共有__________种不同排法.

4．（2023·上海虹口·统考一模）第5届中国国际进口博览会在上海举行，某高校派出了包括甲同学在内的4名同学参加了连续5天的志愿者活动．已知甲同学参加了2天的活动，其余同学各参加了1天的活动，则甲同学参加连续两天活动的概率为______．（结果用分数表示）

5．（2023·上海金山·统考一模）从1，2，3，4，5这五个数中随机抽取两个不同的数，则所抽到的两个数的和大于6的概率为__________（结果用数值表示）.

6．（2023·上海闵行·统考一模）今年中秋和国庆共有连续8天小长假，某单位安排甲、乙、丙三名员工值班，每天都需要有人值班．任选两名员工各值3天班，剩下的一名员工值2天班，且每名员工值班的日期都是连续的，则不同的安排方法数为________.

7．（2023·上海徐汇·统考一模）要排出高一某班一天上午5节课的课表，其中语文、数学、英语、艺术、体育各一节，若要求语文、数学选一门第一节课上，且艺术、体育不相邻上课，则不同的排法种数是___________.

8．（2023·上海嘉定·统考一模）已知11个大小相同的球，其中3个是红球，3个是黑球，5个是白球，从中随机取出4个形成一组，其中三种颜色都有的概率为____________.

二、二项式定理

9．（2023·上海闵行·统考一模）已知$(x-1)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则$a_2=$________.

10．（2023·上海金山·统考一模）若$(10x+6y)^3=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$，则$-a+2b-4c+8d=$________.

11．（2023·上海崇明·统考一模）$\left(x+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$的展开式中$x^2$的系数为__________．（用数字作答）

12．（2023·上海普陀·统考一模）设$(1-2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n$，若$a_0+a_4=17$.则$n=$______.

13．（2023·上海嘉定·统考一模）已知$(1+2x)^6$的二项展开式中系数最大的项为____________.

14．（2023·上海杨浦·统考一模）已知$(1+x)^m+(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{m+n}x^{m+n}$（$m$、$n$为正整数）对任意实数$x$都成立，若$a_1=12$，则$a_2$的最小值为________.

排列组合与二项式

学校:__________姓名：__________班级：__________考号：__________

一、排列组合

1．（2023上·上海虹口·高三统考期末）将甲、乙等8人安排在4天值班，若每天安排两人，则甲、乙两人安排在同一天的概率为________．（结果用分数表示）

【答案】$\frac{1}{7}$

【分析】根据排列组合相关知识直接计算求解.

【详解】将甲、乙等8人安排在4天值班，若每天安排两人，共有$C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2=28\times15\times6\times1=2520$种方案，

乙两人安排在同一天，共有$C_4^1C_6^2C_4^2C_2^2=4\times15\times6\times1=360$，

所以甲、乙两人安排在同一天的概率为$\frac{360}{2520}=\frac{1}{7}$.

故答案为：$\frac{1}{7}$

2．（2023上·上海浦东新·高三统考期末）在100件产品中有90件一等品、10件二等品，从中随机抽取3件产品，则恰好含1件二等品的概率为__________（结果精确到0.01）.

【答案】0.25

【分析】由题意先求出事件总数，再求出恰好有一件二等品的事件，结合古典概型的概率公式计算即可求解.

【详解】从这批产品中抽取3件，则事件总数为C_{100}^3，

其中恰好有一件二等品的事件有$C_{90}^2C_{10}^1$，

所以恰好有一件二等品的概率为$P=\frac{C_{90}^2C_{10}^1}{C_{100}^3}=\frac{267}{1078}\approx0.25$.

故答案为：0.25

3．（2023·上海长宁·统考一模）将4个人排成一排，若甲和乙必须排在一起，则共有________种不同排法.

【答案】12

【分析】利用捆绑法，先将甲乙看成一个整体，再与剩余学生排列.

【详解】先将甲乙看成一个整体，共有$A_2^2=2$种不同排法，

再与剩余学生排列，共有$A_3^3=6$种不同排法，

所以共有$2\times6=12$种不同排法.

故答案为：12.

4.（2023·上海虹口·统考一模）第 5 届中国国际进口博览会在上海举行，某高校派出了包括甲同学在内的 4 名同学参加了连续 5 天的志愿者活动．已知甲同学参加了 2 天的活动，其余同学各参加了 1 天的活动，则甲同学参加连续两天活动的概率为______．（结果用分数表示）

【答案】$\frac{2}{5}$/0.4

【分析】根据古典概型的概率公式，结合排列数、组合数运算求解.

【详解】“甲同学参加了 2 天的活动，其余同学各参加了 1 天的活动”共有 $C_5^2A_3^3=60$ 种可能，

“甲同学参加连续两天活动”共有 $C_4^1A_3^3=24$ 种可能，

故甲同学参加连续两天活动的概率 $P=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$.

故答案为：$\frac{2}{5}$.

5.（2023·上海金山·统考一模）从 1，2，3，4，5 这五个数中随机抽取两个不同的数，则所抽到的两个数的和大于 6 的概率为__________（结果用数值表示）.

【答案】$\frac{2}{5}$/0.4

【分析】求出所有的基本事件个数以及符合题意的基本事件个数，利用古典概型求概率即可.

【详解】根据题意，从 1，2，3，4，5 这五个数中随机抽取两个不同的数共有 $C_5^2=10$，

所抽到两个数的和大于 6 共有 $(2,5)$，$(3,5)$，$(4,5)$，$(3,4)$ 共 4 种，

所以所抽到的两个数的和大于 6 的概率为 $P=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

故答案为：$\frac{2}{5}$

6.（2023·上海闵行·统考一模）今年中秋和国庆共有连续 8 天小长假，某单位安排甲、乙、丙三名员工值班，每天都需要有人值班．任选两名员工各值 3 天班，剩下的一名员工值 2 天班，且每名员工值班的日期都是连续的，则不同的安排方法数为________.

【答案】18

【分析】先确定值班 2 天的人，有 3 种选择，再将三个人全排即可，结合分步乘法计数原理可得结果.

【详解】三人值班的天数分别为 3、3、2，先确定值班 2 天的人，有 3 种选择，

再将三个人全排即可，所以，不同的排法种数为 $3P_3^3=18$ 种.

故答案为：18.

7.（2023·上海徐汇·统考一模）要排出高一某班一天上午 5 节课的课表，其中语文、数学、英语、艺术、

体育各一节，若要求语文、数学选一门第一节课上，且艺术、体育不相邻上课，则不同的排法种数是__________.

【答案】24

【分析】先排第一节，再利用插空法计算即可.

【详解】先排第一节有 C_2^1 种排法，

再在其后排语数英中除第一节外的两科目，有 A_2^2 种不同排列,

并形成 3 个空排艺术、体育两门科目，有 A_3^2 种排法，

故不同的排课方法有 $C_2^1 \cdot A_2^2 \cdot A_3^2 = 24$ 种方法.

故答案为：24.

8．（2023·上海嘉定·统考一模）已知 11 个大小相同的球，其中 3 个是红球，3 个是黑球，5 个是白球，从中随机取出 4 个形成一组，其中三种颜色都有的概率为__________.

【答案】$\frac{6}{11}$

【分析】4 个球有三个颜色，肯定有两个球同色，按同色的球的颜色分情况讨论，再结合古典概型概率的计算公式可求答案.

【详解】从 11 个球中随机取出 4 个球的取法有：$C_{11}^4 = \frac{11\times10\times9\times8}{4\times3\times2\times1} = 330$.

又 4 个球有三种颜色，所以必定有且只有两个球同色.

若同色的两个球为红色，满足条件的取法有：$C_3^2C_3^1C_5^1 = 45$；

若同色的两个球为黑色，满足条件的取法有：$C_3^1C_3^2C_5^1 = 45$；

若同色的两个球为白色，满足条件的取法有：$C_3^1C_3^1C_5^2 = 90$.

∴取出的 4 个球中三种颜色都有的概率为：$P = \frac{45+45+90}{330} = \frac{6}{11}$

故答案为：$\frac{6}{11}$

二、二项式定理

9．（2023·上海闵行·统考一模）已知 $(x-1)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$，则 $a_2 =$________.

【答案】6

【分析】直接利用二项式定理计算得到答案.

【详解】$(x-1)^4$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_4^r x^{4-r} \cdot (-1)^r$，取 $x=2$ 得到 $a_2 = C_4^2 \cdot (-1)^2 = 6$.

故答案为：6．

10．（2023·上海金山·统考一模）若$(10x+6y)^3=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$，则$-a+2b-4c+8d=$________．

【答案】8

【分析】采用赋值法，令$x=-1,y=2$即可求得结果．

【详解】令$x=-1,y=2$，则$(10\times(-1)+6\times 2)^3=-a+2b-4c+8d$，

所以$-a+2b-4c+8d=2^3=8$，

故答案为：8．

11．（2023·上海崇明·统考一模）$\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^5$的展开式中$x^2$的系数为__________．（用数字作答）

【答案】10

【分析】利用二项式展开式的通项公式计算即可．

【详解】由$\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^5$的展开式的通项公式为$\mathrm{C}_5^k\cdot x^{5-k}\cdot\left(\frac{2}{x^2}\right)^k=\mathrm{C}_5^k\cdot 2^k\cdot x^{5-3k}$，$k=0,1,\cdots,5$，

令$5-3k=2$，得$k=1$，

所以展开式中x^2的系数为$\mathrm{C}_5^1\times 2^1=10$．

故答案为：10．

12．（2023·上海普陀·统考一模）设$(1-2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n$，若$a_0+a_4=17$.则

$n=$______．

【答案】4

【分析】由二项展开式通项公式可确定a_0,a_4，可构造关于n的方程，解方程求得结果．

【详解】$(1-2x)^n$展开式的通项公式为：$\mathrm{C}_n^r(-2x)^r$，分别令$r=0,r=4$，$\therefore a_0=1$，$a_4=16\mathrm{C}_n^4$，

则$a_0+a_4=17$，即$1+16\mathrm{C}_n^4=17$，解得：$n=4$．

故答案为：4．

13．（2023·上海嘉定·统考一模）已知$(1+2x)^6$的二项展开式中系数最大的项为____________．

【答案】$240x^4$

【分析】设系数最大的项为$T_{k+1}=\mathrm{C}_6^k(2x)^k$，则可得$\begin{cases}\mathrm{C}_6^k\cdot 2^k\ge\mathrm{C}_6^{k+1}\cdot 2^{k+1}\\ \mathrm{C}_6^k\cdot 2^k\ge\mathrm{C}_6^{k-1}\cdot 2^{k-1}\end{cases}$，直接求解即可．

【详解】设系数最大的项为$T_{k+1}=\mathrm{C}_6^k(2x)^k$，

则$\begin{cases}C_6^k\cdot 2^k\geq C_6^{k+1}\cdot 2^{k+1}\\ C_6^k\cdot 2^k\geq C_6^{k-1}\cdot 2^{k-1}\end{cases}$，解得$\frac{11}{3}\leq k\leq\frac{14}{3}$，

因为$0\leq k\leq 6$且k为整数，

所以$k=4$，此时最大的项为$T_5=C_6^4(2x)^4=240x^4$.

故答案为：$240x^4$

14．（2023·上海杨浦·统考一模）已知$(1+x)^m+(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{m+n}x^{m+n}$（$m$、$n$为正整数）对任意实数$x$都成立，若$a_1=12$，则$a_2$的最小值为________.

【答案】30

【分析】由题得$a_1=C_m^1+C_n^1=m+n=12$，$a_2=C_m^2+C_n^2$，根据组合数公式和基本不等式即可求解.

【详解】$a_1=C_m^1+C_n^1=m+n=12$，

$$a_2=C_m^2+C_n^2=\frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{m^2+n^2-(m+n)}{2}=\frac{m^2+n^2-12}{2}=\frac{m^2+n^2}{2}-6$$

$$=\frac{(m+n)^2-2mn}{2}-6=\frac{12^2-2mn}{2}-6=66-mn,$$

因为$m+n=12\geq 2\sqrt{mn}$，所以$mn\leq 36$，当且仅当$m=n=6$时等号成立，

所以$a_2=66-mn\geq 30$，a_2的最小值为30，

故答案为：30.