虹口区 2020 学年度第一学期期终学生学习能力诊断测试

高三数学　试卷

（时间 120 分钟，满分 150 分）　　　　　　2020.12

一、填空题（1～6 题每题 4 分，7～12 题每题 5 分，本大题满分 54 分）

1．已知集合 $A=\{x|x+3>0,x\in R\}$，$B=\{x|x^2+2x-8<0,x\in R\}$，则 $A\cap B=$________.

2．方程 $x^2+2x+2=0$ 的根是________.

3．行列式 $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \sin\alpha-\cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha+\cos\alpha\end{vmatrix}$ 的值等于________.

4．函数 $f(x)=\log_2(2x+4)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$，则 $f^{-1}(4)=$________.

5．从甲、乙、丙、丁 4 名同学中选 2 名同学参加志愿者服务，则甲、乙两人都没有被选到的概率为（用数字作答）.

6．在 $(2x+1)^8$ 的二项式展开式中，x^2 项的系数是________.

7．计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|4n-23|}{2n}=$________.

8．过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点作与抛物线对称轴垂直的直线交抛物线于 A 、B 两点，且 $|AB|=4$，则 $p=$________.

9．已知 $\alpha\in(0,\ \pi)$，且有 $1-2\sin2\alpha=\cos2\alpha$，则 $\cos\alpha=$________.

10．设 F_1,F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的左、右焦点，点 P 在双曲线右支上且满足 $|PF_2|=|F_1F_2|$，双曲线的渐近线方程为 $4x\pm3y=0$，则 $\cos\angle PF_1F_2=$________.

11．若 a,b 分别是正数 p，q 的算术平均数和几何平均数，且 $a,b,-2$ 这三个数可适当排序后成等差数列，也可适当排序后成等比数列，则 $p+q+pq$ 的值形成的集合是________.

12．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-2$，且 $S_n=\dfrac{3}{2}a_n+n$（其中 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和），$f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且满足 $f(2-x)=f(x)$，则 $f(a_{2021})=$________.

二．选择题（每小题 5 分，满分 20 分）

13．若 $a>b$，则下列各式中恒正的是（　　）

A. $\lg(a-b)$　　*B.* a^3-b^3　　*C.* $0.5^a-0.5^b$　　*D.* $|a|-|b|$

14．在ΔABC中，若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}^2=0$，则$\Delta ABC$的形状一定是（　　）

*A.*等边三角形　　*B.*直角三角形　　*C.*等腰三角形，　　*D.*等腰直角三角形

15．已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，$(A>0,\omega>0)$的图像与直线$y=b(0<b<A)$的三个相邻交点的横坐标依次是1,2,4，下列区间是函数$f(x)$单调递增区间的是（　　）．

A. $[0,\ 3]$　　*B.* $\left[\frac{3}{2},\ 3\right]$　　*C.* $[3,\ 6]$　　*D.* $\left[3,\ \frac{9}{2}\right]$

16．在空间，已知直线l及不在l上两个不重合的点A、B，过直线l做平面α，使得点A、B到平面α的距离相等，则这样的平面α的个数不可能是（　　）．

A. 1个　　*B.* 2个　　*C.* 3个　　*D.*无数个

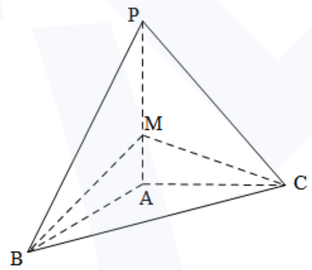
三．解答题（本大题满分76分）

17．（本题满分14分.第（1）小题7分，第（2）小题7分.）

如图在三棱锥$P-ABC$中，棱AB、AC、AP两两垂直，$AB=AC=AP=3$，点M在AP上，且$AM=1$.

（1）求异面直线BM和PC所成的角的大小；

（2）求三棱锥$P-BMC$的体积.



18．（本题满分14分.第（1）小题7分，第（2）小题7分.）

已知函数$f(x)=(a+1)x^2+(a-1)x+(a^2-1)$，其中$a\in R$.

（1）当$f(x)$是奇函数时，求实数a的值；

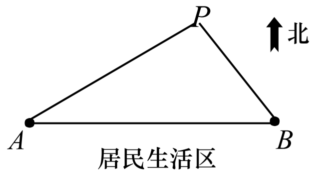
（2）当函数$f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增时，求实数a的取值范围.

19．（本题满分 14 分.第（1）小题 6 分，第（2）小题 8 分.）

如图所示，A,B两处各有一个垃圾中转站，B在A的正东方向$16\ km$处，AB的南面为居民生活区．为了妥善处理生活垃圾，政府决定在AB的北面P处建一个发电厂，利用垃圾发电．要求发电厂到两个垃圾中转站的距离（单位：km）与它们每天集中的生活垃圾量（单位：吨）成反比，现估测得A,B两处中转站每天集中的生活垃圾量分别约为30吨和50吨．

（1）当$AP=15km$时，求$\angle APB$的值；

（2）发电厂尽量远离居民区,要求ΔPAB的面积最大．问此时发电厂与两个垃圾中转站的距离各为多少？



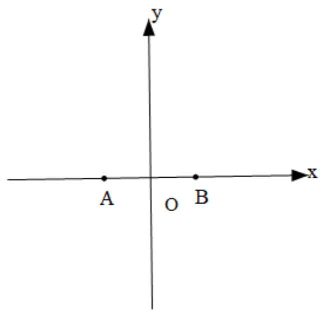
20．（本题满分 16 分.第（1）小题 3 分，第（2）小题 7 分，第（3）小题 6 分.）

已知点$A(-1,0)$、$B(1,0)$,直线$l:ax+by+c=0$(其中$a,b,c\in R$），点P在直线l上.

（1）若a，b，c是常数列，求$|PB|$的最小值；

（2）若a，b，c成等差数列，且$PA\perp l$，求$|PB|$的最大值；

（3）若a，b，c成等比数列，且$PA\perp l$，求$|PB|$的取值范围.



21．（本题满分 18 分.第（1）小题 4 分，第（2）小题 5 分，第（3）小题 9 分）.

设 x 是实数，n 是整数，若 $|x-n|<\frac{1}{2}$，则称 n 是数轴上与 x 最接近的整数.

（1）数列 $\{a_n\}$ 的通项为 a_n，且对任意的正整数 n，n 是数轴上与 a_n 最接近的整数,写出一个满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的前三项；

（2）数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$,其前 n 项和为 S_n，求证：整数 a_n 是数轴上与实数 $\sqrt{2S_n}$ 最接近的整数；

（3）T_n 是首项为 2，公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列的前 n 项和，d_n 是数轴上与 T_n 最接近的正整数，求 $d_1+d_2+\cdots+d_{2020}$.

虹口区 2020 学年度第一学期高三年级数学学科

期终教学质量监控测试题答案

一、填空题（1～6 题每小题 4 分，7～12 题每小题 5 分，本大题满分 54 分）

1、$(-3,2)$；　2、$-1\pm i$；　3、1；　4、6；　5、$\dfrac{1}{6}$；　6、112；　7、2；

8、2；　9、$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；　10、$\dfrac{4}{5}$；　11、$\{9\}$；　12、0；

二、选择题（每小题 5 分，满分 20 分）

13、B；　14、B；　15、D；　16、C；

三、解答题（本大题满分 76 分）

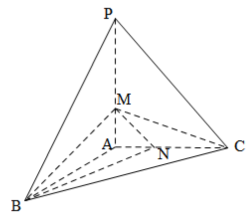
17、（14 分）解:（1）如图，取线段 $AN=1$，连 MN、BN．

$\because MN \parallel PC$，$\therefore \angle BMN$ 的大小等于异面直线 BM 和 PC 所成的角或补角的大小．…………3 分

$MN=\dfrac{1}{3}\sqrt{PA^2+AC^2}=\sqrt{2}$，$BM=BN=\sqrt{3^2+1}=\sqrt{10}$

$\cos\angle BMN=\dfrac{\frac{1}{2}MN}{BM}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{5}}{10},\angle BMN=\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ ……6 分

所以异面直线 BM 和 PC 所成的角的大小等于 $\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{10}$．………………7 分



（2）$\because$ AB、AC、AP 两两垂直, $AB=AC=3$，$AP=3$, $AM=1$．

$\therefore V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot PA=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times3\times3=\dfrac{9}{2}$…………9 分

$V_{M-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot MA=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times3\times1=\dfrac{3}{2}$…………11 分

$V_{P-BMC}=V_{P-ABC}-V_{M-ABC}=\dfrac{9}{2}-\dfrac{3}{2}=3$．

$\therefore$ 三棱锥 $P-BMC$ 的体积大小等于 3（立方单位）．………………14 分

18、（14 分）解：（1）$\because$ $f(x)$ 是奇函数，$\therefore$ 对任意 x 均有 $f(-x)=-f(x)$ 成立．…………2 分

$\therefore f(-x)=(a+1)(-x)^2+(a-1)(-x)+(a^2-1)=-[(a+1)x^2+(a-1)x+(a^2-1)]$

整理得 $(a+1)x^2+(a^2-1)=0$．……………………4 分

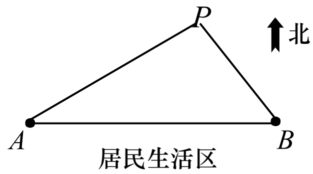
$\therefore \begin{cases}a+1=0\\a^2-1=0\end{cases}$，从而解得 $a=-1$………………7 分.

（2）当 $a=-1$ 时，$f(x)=-2x$,在 $[2,+\infty)$ 上递减，不符合题意．…………9 分

当 $a\neq -1$ 时，此函数是二次函数，根据二次函数的单调性，要使得 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，只要

$$\begin{cases} a+1>0 \\ -\dfrac{a-1}{2(a+1)}\le 2 \end{cases}.$$ ………11 分

解得 $\begin{cases} a>-1 \\ a\ge -\dfrac{3}{5} \end{cases}$,$\therefore$ $a\ge -\dfrac{3}{5}$ ……………………14 分



19、（14 分）解：（1）由条件，得 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{50}{30}=\dfrac{5}{3}$， $PA=15,PB=9$，……2 分

则 $\cos\angle APB=\dfrac{15^2+9^2-16^2}{2\times 15\times 9}=\dfrac{5}{27}$,所以 $\angle APB=\arccos\dfrac{5}{27}$； …………6 分

（2）由条件①，得 $\dfrac{PA}{PB}=\dfrac{50}{30}=\dfrac{5}{3}$，可设 $PA=5t,PB=3t$，其中 $2<t<8$ ……8 分

$\cos\angle APB=\dfrac{(5t)^2+(3t)^2-16^2}{2\times 5t\times 3t}=\dfrac{17t^2-128}{15t^2}$ ，$\sin\angle APB=\sqrt{1-\left(\dfrac{17t^2-128}{15t^2}\right)^2}$ ……10 分

则 $S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}\times 5t\times 3t\times\sqrt{1-\left(\dfrac{17t^2-128}{15t^2}\right)^2}=\sqrt{-16t^4+1088t^2-4096}=4\sqrt{-(t^2-34)^2+900}$

当 $t=\sqrt{34}$，即 $PA=5\sqrt{34}km,PB=3\sqrt{34}km$ 时，h 取得最大值 15 千米. …………13 分

即当 $PA=5\sqrt{34}$ 千米，$PB=3\sqrt{34}$ 千米时，满足要求…………14 分

20、（16 分）解：（1）当 a，b，c 是常数列时，直线方程是 $l:x+y+1=0$.

B 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|1+0+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,所以 $|PB|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$ ………………3 分

(2)当 a，b ，c 成等差数列时，$2b=a+c$,即 $a-2b+c=0$，直线 l 过点 $M(1,-2)$ ……5 分

由于 $PA\perp l$,点 P 在以 AM 为直径的圆上，此圆的圆心为 $C(0,-1)$，半径为 $\sqrt{2}$，方程为 $x^2+(y+1)^2=2$

……………………7 分

而点 B 在此圆上,所以 $|PB|$ 的最大值 $2\sqrt{2}$ ……………………10 分

另解：当 $a=0$ 时，则 $b\neq 0$,由 $2b=a+c$ 得 $c=2b$,$l:\ y+2=0$，$P(-1,-2)$，$|PB|=2\sqrt{2}$ ……………………4 分

当 $b=0$ 时，则 $a\neq 0$,由 $2b=a+c$ 得 $c=-a$,$l:\ x-1=0$，$P(1,0)$，$|PB|=0$ ………………5 分

当$a\neq 0$且$b\neq 0$时，$MP: y=\dfrac{b}{a}(x+1)$,又$2b=a+c$,由$\begin{cases} y=\dfrac{b}{a}(x+1) \\ ax+by+c=0 \end{cases}$得$\begin{cases} x=\dfrac{a^2-2ab-b^2}{a^2+b^2} \\ y=\dfrac{2b(a-b)}{a^2+b^2} \end{cases}$ ………7 分

$$\left|PB\right|^2=(\frac{a^2-2ab-b^2}{a^2+b^2}-1)^2+\frac{4b^2(a-b)^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{8b^2}{a^2+b^2}=\frac{8}{(\frac{a}{b})^2+1}<8$$,所以$\left|PB\right|<2\sqrt{2}$

所以$\left|PB\right|$的最大值$2\sqrt{2}$ ……………………10 分

（3）由a，b ，c成等比数列，得$b^2=ac$，a、b、c都不为 0.

由$\begin{cases} y=\dfrac{b}{a}(x+1) \\ ax+by+c=0 \end{cases}$得$\begin{cases} x=\dfrac{-2b^2}{a^2+b^2} \\ y=\dfrac{b(a^2-b^2)}{a(a^2+b^2)} \end{cases}$ ……………………12 分

$$\left|PB\right|^2=(\frac{-2b^2}{a^2+b^2}-1)^2+\frac{b^2(a^2-b^2)^2}{a^2(a^2+b^2)^2}=\frac{a^4+6a^2b^2+b^4}{a^2(a^2+b^2)}=\frac{(\frac{b}{a})^4+6(\frac{b}{a})^2+1}{(\frac{b}{a})^2+1}$$ ……14 分

令$t=(\dfrac{b}{a})^2+1\in(1,2)\cup(2,+\infty)$，则$\left|PB\right|^2=t-\dfrac{4}{t}+4\in(1,4)\cup(4,+\infty)$,

所以$\left|PB\right|$的取值范围是（1，2）∪（2，+∞）……16 分

21、（18 分）解：(1)$\because$ $\left|a_1-1\right|<\dfrac{1}{2}$，得$\dfrac{1}{2}<a_1<\dfrac{3}{2}$.同理$\dfrac{3}{2}<a_2<\dfrac{5}{2}$,$\dfrac{5}{2}<a_3<\dfrac{7}{2}$.

满足条件的一个数列的前三项为 1，2，3……………………4 分

(2)由$a_n=n$，得$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$,$\left|\sqrt{2S_n}-a_n\right|=\left|\sqrt{n(n+1)}-n\right|=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}<\dfrac{n}{n+n}=\dfrac{1}{2}$ …………………………9 分

（3）由已知条件得$T_n=\dfrac{2[1-(\frac{2}{3})^n]}{1-\frac{2}{3}}=6[1-(\dfrac{2}{3})^n]<6$，$2\le T_n<6$

由$\left|T_n-d_n\right|<\dfrac{1}{2}$，得$2\le d_n\le 6$ ………………12 分

当$d_n=2$时，由$\left|6[1-(\dfrac{2}{3})^n]-2\right|<\dfrac{1}{2}$，得$\dfrac{7}{12}<(\dfrac{2}{3})^n<\dfrac{9}{12}$，$\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{9}{12}<n<\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{7}{12}$,得$0.22\le n\le 1.33$，得$n=1$，

即$d_1=2$…………13 分

当$d_n=3$时，由$\left|6[1-(\dfrac{2}{3})^n]-3\right|<\dfrac{1}{2}$，得$\dfrac{5}{12}<(\dfrac{2}{3})^n<\dfrac{7}{12}$，$\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{7}{12}<n<\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{5}{12}$,得$1.33\le n\le 2.16$,得$n=2$，即

$d_2=3$…………14 分

当 $d_n=4$ 时，由 $\left|6[1-(\frac{2}{3})^n]-4\right|<\frac{1}{2}$，得 $\frac{3}{12}<(\frac{2}{3})^n<\frac{5}{12}$，$\log_{\frac{2}{3}}\frac{5}{12}<n<\log_{\frac{2}{3}}\frac{3}{12}$,得 $2.16\le n\le 3.42$,得 $n=3$，即

$d_3=4$………………15 分

当 $d_n=5$ 时，由 $\left|6[1-(\frac{2}{3})^n]-5\right|<\frac{1}{2}$，得 $\frac{1}{12}<(\frac{2}{3})^n<\frac{3}{12}$，$\log_{\frac{2}{3}}\frac{3}{12}<n<\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{12}$,得 $3.42\le n\le 6.13$,得 $n=4,5,6$，

即 $d_4=5$，$d_5=5$，$d_6=5$………………16 分

当 $d_n=6$ 时，由 $\left|6[1-(\frac{2}{3})^n]-6\right|<\frac{1}{2}$，得 $-\frac{1}{12}<(\frac{2}{3})^n<\frac{1}{12}$，$n>\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{12}$，得 $n\ge 6.13$，即 $n\ge 7$ 时，

$d_n=6$………………17 分

所以 $d_1+d_2+\cdots+d_{2020}=2+3+4+3\times 5+2014\times 6=12108$…………18 分