上海市黄浦区 2021 届高三一模数学试卷

2021.01

一. 填空题（本大题共 12 题，1-6 每题 4 分，7-12 每题 5 分，共 54 分）

1. 已知集合 $A=\{x,x^2\}$（$x\in\mathbf{R}$），若$1\in A$，则$x=$________

2. 已知函数$f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$，则该函数的定义域是________

3. 已知$\sin(\pi-\theta)=-\dfrac{1}{3}$，则$\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=$________

4. 已知幂函数$y=f(x)$的图像过点$(4,\dfrac{1}{2})$，则$f(x)=$________

5. 已知x是-2和 8 的等差中项，y^2是 32 和 8 的等比中项，则$\sqrt{x^2+y^2}=$________

6. 已知直线l过点$P(-2,1)$，直线l的一个方向向量$\vec{d}=(-3,2)$，则直线l的点方向式方程是________

7. 某圆锥体的底面圆的半径长为$\sqrt{2}$，其侧面展开图是圆心角为$\dfrac{2}{3}\pi$的扇形，则该圆锥体的体积是________

8. 已知$(\dfrac{1}{x}-\sqrt{x})^9$的二项展开式中的常数项的值是$a$，若$3\mathrm{i}\cdot z+a-6\mathrm{i}=72+3\mathrm{i}$（其中$\mathrm{i}$是虚数单位），则复数$z$的模$|z|=$________（结果用数值表示）

9. 若关于x、y的二元一次线性方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$的增广矩阵是$\begin{pmatrix}m&1&3\\0&2&n\end{pmatrix}$，且$\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$是该线性方程组的解，则三阶行列式$\begin{vmatrix}-1&0&1\\0&3&m\\2&n&1\end{vmatrix}$中第 3 行第 2 列的元素的代数余子式的值是________

10. 某高级中学欲从本校的 7 位古诗词爱好者（其中男生 2 人、女生 5 人）中随机选取 3 名同学作为学校诗词朗读比赛的主持人，若要求主持人中至少有一位是男同学，则不同选取方法的种数是________（结果用数值表示）

11. 已知平面向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，向量$\vec{c}=\lambda\cdot\vec{a}+(1-\lambda)\cdot\vec{b}$（$\lambda\in\mathbf{R}$），且对任意$\lambda\in\mathbf{R}$，总有$|\vec{c}+k\vec{a}|\ge 2\sqrt{5}$成立，则实数$k$的取值范围是________

12. 已知$a,b\in\mathbf{R}$，函数$f(x)=x^2+ax+b+|x^2-ax-b|$（$x\in\mathbf{R}$），若函数$f(x)$的最小值为$2b^2$，则实数b的取值范围是________

二. 选择题（本大题共 4 题，每题 5 分，共 20 分）

13. 已知 a、b、l 是空间中三条直线，其中直线 a、b 在平面 α 上，则“$l \perp a$ 且 $l \perp b$”是“$l \perp$ 平面 α”的（　　）

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

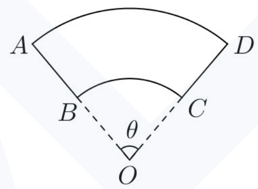
C. 充要条件　　D. 非充分也非必要条件

14. 为了得到函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$（$x\in \mathbf{R}$）的图像，可以将函数 $y=2\sin x$（$x\in \mathbf{R}$）的图像（　　）

A. 向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位　　B. 向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位

C. 向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位　　D. 向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位

15. 某企业欲做一个介绍企业发展史的铭牌，铭牌的截面形状是如图所示的扇形环面（由扇形 OAD 挖去扇形 OBC 后构成），已知 $OA=10$ 米，$OB=x$ 米（$0<x<10$），线段 BA、线段 CD、弧 BC、弧 AD 的长度之和为 30 米，圆心角为 θ 弧度，则 θ 关于 x 的函数解析式是（　　）



A. $\theta=\dfrac{2x+10}{x+10}$　　B. $\theta=\dfrac{x+10}{2x+10}$

C. $\theta=\dfrac{10-x}{10+x}$　　D. $\theta=\dfrac{10-x}{2x+10}$

16. 已知 $k\in \mathbf{R}$，函数 $f(x)=|x^2-4|+x^2+kx$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,4)$ 上有两个不同的零点，则 k 的取值范围是（　　）

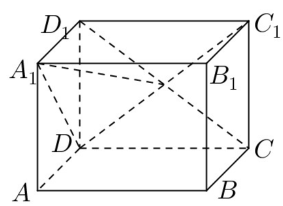
A. $-7<k<-2$　　B. $k<-7$ 或 $k>-2$　　C. $-7<k<0$　　D. $-2<k<0$

三. 解答题（本大题共 5 题，共 14+14+14+16+18=76 分）

17. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，点 E 是侧面 CDD_1C_1 的中心.

（1）联结 A_1D，求三棱锥 A_1-DED_1 的体积 $V_{A_1-DED_1}$ 的数值；

（2）求异面直线 A_1E 与 AD 所成角的大小（结果用反三角函数值表示）.



18. 在△ABC中，内角A、B、C所对的边分别为a、b、c，若A为钝角，且$2a\sin B-\sqrt{2}b=0$.

（1）求角A的大小；

（2）记$B=x$，求函数$f(x)=\cos x+\cos(\frac{\pi}{3}+x)$的值域.

19. 已知实数a、b是常数，函数$f(x)=(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+a)(\sqrt{1-x^2}+b)$.

（1）求函数$f(x)$的定义域，判断函数的奇偶性，并说明理由；

（2）若$a=-3$，$b=1$，设$t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$，记t的取值组成的集合为D，则函数$f(x)$的值域与函数$g(t)=\frac{1}{2}(t^3-3t^2)$（$t\in D$）的值域相同，试解决下列问题：

① 求集合D；

② 研究函数$g(t)=\frac{1}{2}(t^3-3t^2)$在定义域$D$上是否具有单调性？若有，请用函数单调性定义加以证明，若没有，请说明理由，并利用你的研究结果进一步求出函数$f(x)$的最小值.

20. 定义：已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），把圆$x^2+y^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$称为该椭圆的协同圆，设椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$的协同圆为圆$O$（$O$为坐标系原点），试解决下列问题：

（1）写出协同圆圆O的方程；

（2）设直线l是圆O的任意一条切线，且交椭圆C于A、B两点，求$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的值；

（3）设M、N是椭圆C上的两个动点，且$OM\perp ON$，过点O作$OH\perp MN$，交直线MN于H点，求证：点H总在某个定圆上，并写出该定圆的方程.

21. 已知函数$y=f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，数列$\{a_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）满足$a_2\neq a_1$，$a_n=f(a_{n-1})$，$f(a_n)+kf(a_{n-1})=t(a_n+ka_{n-1})$（$n\geq 2$，$n\in\mathbf{N}^*$）（实数$k$、$t$是非零常数）.

（1）若$k=-1$，且数列$\{a_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）是等差数列，求实数t的值；

（2）若$a_2+ka_1\neq 0$，数列$\{b_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）满足$b_n=a_{n+1}+ka_n$（$n\in\mathbf{N}^*$），求通项公式b_n；

（3）若$k=-1$，$t\neq 1$，数列$\{a_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）是等比数列，且$a_1=a$（$a\neq 0$，$a\in\mathbf{R}$），$a_2\neq a_1$，试证明：$f(a)=t\cdot a$.

参考答案

一. 填空题

1. -1　　2. $(-1,1)$　　3. $-\frac{1}{3}$　　4. $x^{-\frac{1}{2}}$

5. 5　　6. $\frac{(x+2)}{-3}=\frac{y-1}{2}$　　7. $\frac{8}{3}\pi$　　8. 5

9. 4　　10. 25　　11. $k\le -6$ 或 $k\ge 4$　　12. $0\le k\le 1$

二. 选择题

13. B　　14. C　　15. A　　16. A

三. 解答题

17.（1）$V_{A_1-DED_1}=\frac{16}{3}$；（2）$\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18.（1）$A=\frac{3}{4}\pi$；（2）$(\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{12},\frac{3}{2})$ 或 $(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\frac{3}{2})$.

19.（1）偶函数；（2）①$D=[\sqrt{2},2]$；②减函数，$f(x)$ 的最小值为 -2.

20.（1）$x^2+y^2=\frac{4}{3}$；（2）$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$；（3）证明略，该定圆方程为 $x^2+y^2=\frac{4}{3}$.

21.（1）$t=1$；（2）$b_n=(a_2+ka_1)t^{n-1}$（$n\in\mathbf{N}^*$）；（3）证明略.