金山区 2020 学年第一学期质量监控

高三数学试卷

(满分：150 分，完卷时间：120 分钟)

（答题请写在答题纸上）

一．填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1~6 题每题 4 分，第 7~12 题每题 5 分） 考生应在答题纸的相应位置直接填写结果．

1．若函数 $y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{4})$，则它的最小正周期 T=_______．

2．若复数 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$ (i 为虚数单位)，则 z 的模 $|z|$=_______．

3．若矩阵 $A=\begin{pmatrix}\sin\theta & m\\ n & \cos\theta\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}m & \sin\theta\\ \cos\theta & n\end{pmatrix}$，且 $A=B$，则 m^2+n^2=_______．

4．若函数 $y=\log_2(x-m)+1$ 的反函数的图像经过点 $(1,3)$，则实数 $m=$_______．

5．已知集合 $M=\{y\,|\,y=3\sin x, x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{x\,||\,x|<a\}$，若 $M\subseteq N$，则实数 a 的取值范围是_______．

6．已知 F_1、F_2 是椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的两个焦点，AB 是过点 F_1 的弦，则 $\triangle ABF_2$ 的周长是_______．

7．在五个数字 1，2，3，4，5 中，若随机取出三个数字，则剩下两个数字都是奇数的概率是_______．(结果用数值表示)

8．在直角三角形 ABC 中，$AB=5$，$AC=12$，$BC=13$，点 M 是 $\triangle ABC$ 外接圆上的任意一点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ 的最大值是_______．

9．已知实数 a、b、c 成等差数列，则点 $P(-1,0)$ 到直线 $ax+by+c=0$ 的最大距离是_______．

10．球面上有 3 个点，其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的 $\dfrac{1}{6}$，以这 3 个点为顶点构成的三角形的周长为 18，则此球的半径为_______．

11．关于 x 的方程 $x^2+ax+b-3=0(a,b\in\mathbf{R})$ 在 $[1,2]$ 上有实根，则 $a^2+(b-4)^2$ 的最小值为_______．

12．若 $f(x)=|x+1|+|x+2|+\cdots+|x+2020|+|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-2020|$，$x\in\mathbf{R}$，且 $f(a^2-3a+2)=f(a-1)$，则满足条件的所有整数 a 的和是_______．

二．选择题（本大题共 4 小题，满分 20 分，每小题 5 分）每题有且只有一个正确选项．考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑．

13．在 $(1+2x)^4$ 的二项展开式中，二项式系数的和为(　　)．

(*A*) 8　　(*B*) 16　　(*C*) 27　　(*D*) 81

14．“$|x-1|<2$成立”是“$x(x-3)<0$成立”的(　　).

(A) 充分不必要条件　　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

15．已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$是奇函数，且满足$f(x+3)=f(x)$，$f(1)=-3$，数列$\{a_n\}$满足$S_n=2a_n+n$(其中S_n为$\{a_n\}$的前n项和)，则$f(a_5)+f(a_6)=$(　　).

(A) -3　　(B) -2　　(C) 3　　(D) 2

16．已知$\triangle ABC$的外接圆圆心为O，$\angle A=120^\circ$，若$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$($x$，$y\in\mathbf{R}$)，则$x+y$的最小值为(　　).

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{3}{2}$　　(D) 2

三．解答题（本大题共有5题，满分76分）解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17．(本题满分14分，第1小题满分7分，第2小题满分7分)

已知a、b、c是$\triangle ABC$中$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边，$a=4\sqrt{3}$，$b=6$，$\cos A=-\frac{1}{3}$.

(1) 求c；

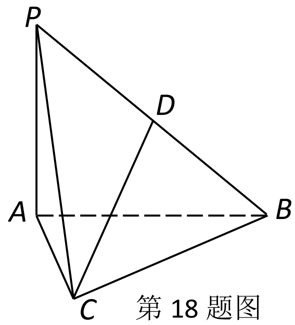
(2) 求$\cos 2B$的值.

18．(本题满分14分，第1小题满分7分，第2小题满分7分)

如图，在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$底面ABC，$\triangle ABC$是边长为2的正三角形，侧棱PB与底面所成的角为$\frac{\pi}{4}$.

(1) 求三棱锥$P-ABC$的体积V；

(2) 若D为PB的中点，求异面直线PA与CD所成角的大小.



第18题图

19．(本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分)

已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$.

(1) 试判断函数 $f(x)=\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调性，并用函数单调性的定义证明；

(2) 若对于任意 $t\in\mathbf{R}$，不等式 $f(t^2-2t)+f(t^2-k)<0$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

20．(本题满分 16 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 5 分，第 3 小题满分 7 分)

已知点 P 在抛物线 $C: y^2=4x$ 上，过点 P 作圆 $M:(x-3)^2+y^2=r^2$ ($0<r\le\sqrt{2}$)的两条切线，与抛物线 C 分别交于 A、B 两点，切线 PA、PB 与圆 M 分别相切于点 E、F.

(1) 若点 P 到圆心 M 的距离与它到抛物线 C 的准线的距离相等，求点 P 的坐标；

(2) 若点 P 的坐标为 $(1,2)$，且 $r=\sqrt{2}$ 时，求 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的值；

(3) 若点 P 的坐标为 $(1,2)$，设线段 AB 中点的纵坐标为 t，求 t 的取值范围.

21．(本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 7 分，第 3 小题满分 7 分)

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{1}{\lambda}\le\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le\lambda$ ($\lambda>1$，且 λ 为实常数)，$n\in\mathbf{N}^*$，则称数列 $\{a_n\}$ 为 $B(\lambda)$ 数列.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的前三项依次为 $a_1=2$，$a_2=x$，$a_3=9$，且 $\{a_n\}$ 为 $B(3)$ 数列，求实数 x 的取值范围；

(2) 已知 $\{a_n\}$ 是公比为 $q(q\ne1)$ 的等比数列，且 $a_1>0$，记

$$T_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|.$$

若存在数列 $\{a_n\}$ 为 $B(4)$ 数列，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{T_{n+1}-tT_n}{T_n}\le0$ 成立，求实数 t 的取值范围；

(3) 记无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，证明：“$0\le\dfrac{d}{a_1}\le\lambda-1$”是“$\{a_n\}$ 为 $B(\lambda)$ 数列”的充要条件.

参考答案

1、π　　2、1　　3、1　　4、2　　5、$a>3$

6、20　　7、0.3　　8、45　　9、$2\sqrt{2}$

10、6　　11、2　　12、6

13-16、BBCD

17、（1）$c=2$；（2）$-\frac{1}{3}$

18、（1）$\frac{2\sqrt{3}}{3}$；（2）$\frac{\pi}{3}$

19、（1）单调递减；（2）$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$

20、（1）$\left(2,2\sqrt{2}\right)$或$\left(2,-2\sqrt{2}\right)$；（2）3；（3）$\left[-10,-6\right)$

21、（1）$\left[3,6\right]$；（2）当$q\in\left(1,4\right]$，$t\ge q$，当$q\in\left(0,1\right)$时，$t\ge 1$