

# 闵行区 2020 学年第一学期高三年级质量调研考试

## 数 学 试 卷

考生注意：

1. 本场考试时间 120 分钟，试卷共 4 页，满分 150 分，答题纸共 2 页。
2. 答卷前，考生务必在答题纸上将学校、班级、考生号、姓名等填写清楚。
3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上与试卷题号对应的区域，不得错位，在试卷上作答一律不得分。
4. 用 2B 铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题。

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1~6 题每题 4 分，第 7~12 题每题 5 分）

考生应在答题纸的相应位置直接填写结果。

1. 已知集合  $A = \mathbf{N}^*$ ,  $B = \{x \mid |2x-1| < 5\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_。（用列举法表示）

2. 已知复数  $z$  满足  $zi = 2 + i$  ( $i$  为虚数单位), 则  $z =$ \_\_\_\_\_.

3. 若函数  $f(x) = 2^x + 1$  的图像与  $g(x)$  的图像关于直线  $y = x$  对称, 则  $g(9) =$ \_\_\_\_\_.

4. 若  $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -3$ , 则  $\tan \alpha =$ \_\_\_\_\_.

5. 在  $(1-2x)^6$  的二项展开式中,  $x^3$  项的系数为\_\_\_\_\_。（用数字作答）

6. 如图, 已知正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的底面边长为 2, 高为 3, 则异面直线  $AA_1$  与  $BD_1$  所成角的大小是\_\_\_\_\_.

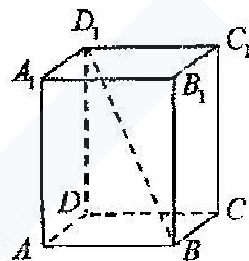
7. 新冠病毒爆发初期, 全国支援武汉的活动中, 需要从 A 医院某科室的 6 名男医生 (含一名主任医师)、4 名女医生 (含一名主任医师) 中分别选派 3 名男医生和 2 名女医生, 要求至少有一名主任医师参加, 则不同的选派方案共有\_\_\_\_\_种。（用数字作答）

8. 设  $k \in \{-2, -1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2\}$ , 若  $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ , 且  $x^k > |x|$ , 则  $k$  取值的集合是\_\_\_\_\_.

9. 已知定义在  $[0, +\infty)$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x) = \begin{cases} 15 - |x-1|, & 0 \leq x < 2 \\ f(x-2) - 2, & x \geq 2 \end{cases}$ . 设  $f(x)$  在  $[2n-2, 2n)$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) 上的最大值记作  $a_n$ ,  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则  $S_n$  的最大值为\_\_\_\_\_.

10. 已知  $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ , 函数  $y = \frac{n}{n^2+3}x + \frac{3n}{n+3}$  的图像与  $y$  轴相交于点  $A_n$ 、与函数  $y = \log_{\frac{1}{n}}(x-4)$  的图像相交于点  $B_n$ ,  $\triangle OA_nB_n$  的面积为  $S_n$  ( $O$  为坐标原点), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ \_\_\_\_\_.

11. 已知平面向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , 对任意实数  $t$ , 都有  $|\vec{b} - t\vec{a}| \geq |\vec{b} - \vec{a}|$ ,  $|\vec{b} - t\vec{c}| \geq |\vec{b} - \vec{c}|$  成立. 若  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{c}| = 2$ ,  $|\vec{a} - \vec{c}| = \sqrt{7}$ , 则  $|\vec{b}| =$ \_\_\_\_\_.



12. 已知函数  $f(x) = \left| x + \frac{1}{x} \right|$ ，给出下列命题：

- ①存在实数  $a$ ，使得函数  $y = f(x) + f(x-a)$  为奇函数；
- ②对任意实数  $a$ ，均存在实数  $m$ ，使得函数  $y = f(x) + f(x-a)$  关于  $x = m$  对称；
- ③若对任意非零实数  $a$ ， $f(x) + f(x-a) \geq k$  都成立，则实数  $k$  的取值范围为  $(-\infty, 4]$ ；
- ④存在实数  $k$ ，使得函数  $y = f(x) + f(x-a) - k$  对任意非零实数  $a$  均存在 6 个零点。

其中的真命题是\_\_\_\_\_。（写出所有真命题的序号）

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 20 分，每题 5 分）每题有且只有一个正确选项。考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑。

13. 若  $a$  为实数，则“ $a < 1$ ”是“ $\frac{1}{a} > 1$ ”的（ ）

- A. 充分非必要条件
- B. 必要非充分条件
- C. 充要条件
- D. 既非充分也非必要条件

14. 若  $\lg 2 = a$ ， $\lg 3 = b$ ，则  $\log_5 12$  等于（ ）

- A.  $\frac{2a+b}{1+a}$
- B.  $\frac{a^2b}{1+a}$
- C.  $\frac{2a+b}{1-a}$
- D.  $\frac{a^2b}{1-a}$

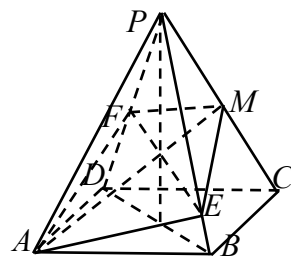
15. 已知点  $P$  为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  右支上一点，点  $F_1, F_2$  分别为双曲线的左右焦点，点  $I$  是  $\triangle PF_1F_2$

的内心（三角形内切圆的圆心），若恒有  $S_{\triangle IPF_1} - S_{\triangle IPF_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} S_{\triangle IF_1F_2}$ ，则双曲线的渐近线方程是（ ）

- A.  $y = \pm x$
- B.  $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} x$
- C.  $y = \pm \sqrt{3} x$
- D.  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} x$

16. 如图，正四棱锥  $P-ABCD$  的底面边长和高均为 2， $M$  是侧棱  $PC$  的中点，若过  $AM$  作该正四棱锥的截面，分别交棱  $PB$ 、 $PD$  于点  $E$ 、 $F$ （可与端点重合），则四棱锥  $P-AEMF$  的体积的取值范围是（ ）

- A.  $\left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$
- B.  $\left[ \frac{1}{2}, \frac{4}{3} \right]$
- C.  $\left[ 1, \frac{4}{3} \right]$
- D.  $\left[ \frac{8}{9}, 1 \right]$



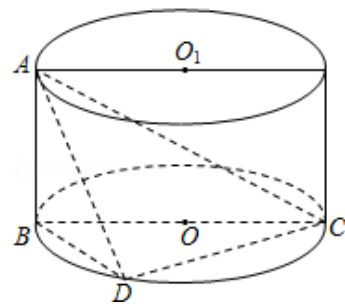
三、解答题（本大题共有 5 题，满分 76 分）解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤。

17.（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

如图，在圆柱  $OO_1$  中， $AB$  是圆柱的母线， $BC$  是圆柱的底面  $\odot O$  的直径， $D$  是底面圆周上异于  $B$ 、 $C$  的点。

(1) 求证：  $CD \perp$  平面  $ABD$ ；

(2) 若  $BD=2$ ， $CD=4$ ， $AC=6$ ，求圆柱  $OO_1$  的侧面积.



18. (本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分)

已知函数  $f(x) = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2\sqrt{2} \cos^2 \frac{x}{2} - \sqrt{2}$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的值域；

(2) 若方程  $f(\omega x) = \sqrt{3}$  ( $\omega > 0$ ) 在区间  $[0, \pi]$  上至少有两个不同的解，求  $\omega$  的取值范围.

19. (本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分)

大数据时代对于数据分析能力的要求越来越高，数据拟合是一种把现有数据通过数学方法来代入某种算式的表示方式. 比如  $A_i(a_i, b_i)$  ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ) 是平面直角坐标系上的一系列点，其中  $n$  是不小于 2 的正整数，用函数  $y=f(x)$  来拟合该组数据，尽可能使得函数图像与点列  $A_i(a_i, b_i)$  比较接近. 其中一种衡量接近程度的指标是函数的拟合误差，拟合误差越小越好，定义函数  $y=f(x)$  的拟合误差为：

$$\Delta(f(x)) = \frac{1}{n} [(f(a_1) - b_1)^2 + (f(a_2) - b_2)^2 + \dots + (f(a_n) - b_n)^2].$$

已知在平面直角坐标系上，有 5 个点的坐标数据如下表所示：

|     |     |   |   |     |   |
|-----|-----|---|---|-----|---|
| $x$ | 1   | 2 | 3 | 4   | 5 |
| $y$ | 2.2 | 1 | 2 | 4.6 | 7 |

(1) 若用函数  $f_1(x) = x^2 - 4x + 5$  来拟合上述表格中的数据，求  $\Delta(f_1(x))$ ；

(2) 若用函数  $f_2(x) = 2^{[x-2]} + m$  来拟合上述表格中的数据，

① 求该函数的拟合误差  $\Delta(f_2(x))$  的最小值，并求出此时的函数解析式  $y = f_2(x)$ ；

② 指出用  $f_1(x), f_2(x)$  中的哪一个函数来拟合上述表格中的数据更好？

20. (本题满分 16 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 6 分)

已知椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过点  $(0, 2)$ ，其长轴长、焦距和短轴长三者的平方依次成等差数列. 直线  $l$  与  $x$

轴的正半轴和  $y$  轴分别交于点  $Q, P$ ，与椭圆  $\Gamma$  相交于两点  $M, N$ ，各点互不重合，且满足  $\overrightarrow{PM} = \lambda_1 \overrightarrow{MQ}$ ， $\overrightarrow{PN} = \lambda_2 \overrightarrow{NQ}$ .

(1) 求椭圆  $\Gamma$  的标准方程；

(2) 若直线  $l$  的方程为  $y = -x + 1$ ，求  $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$  的值；

(3) 若  $\lambda_1 + \lambda_2 = -3$ ，试证明直线  $l$  恒过定点，并求此定点的坐标.

21. (本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分)

已知数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  满足  $a_{n+1} - a_n = \lambda(b_{n+1} - b_n)$  ( $\lambda$  为非零常数)， $n \in \mathbf{N}^*$ .

(1) 若  $\{b_n\}$  是等差数列，求证：数列  $\{a_n\}$  也是等差数列；

(2) 若  $a_1 = 2, \lambda = 3, b_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ ，求数列  $\{a_n\}$  的前 2021 项和；

(3) 设  $a_1 = b_1 = \lambda$ ， $b_2 = \frac{\lambda}{2}$ ， $b_n = \frac{b_{n-1} + b_{n-2}}{2} (n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*)$ ，若对  $\{a_n\}$  中的任意两项  $a_i, a_j (i, j \in \mathbf{N}^*, i \neq j)$ ，

$|a_i - a_j| < 2$  都成立，求实数  $\lambda$  的取值范围.

# 闵行区 2020 学年第一学期高三年级质量调研考试

## 数学试卷参考答案与评分标准

### 一、填空题

1.  $\{1, 2\}$ ; 2.  $1-2i$ ; 3. 3; 4. 2; 5. -160; 6.  $\arctan \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ;  
7. 90; 8.  $\{-2, \frac{2}{3}\}$ ; 9. 64; 10. 6; 11.  $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ ; 12. ②③.

### 二、选择题

13. B; 14. C; 15. D; 16. D.

### 三、解答题

17. [证明] (1) 由已知可知  $AB \perp$  平面  $BCD$ ,  $CD \subsetneq$  平面  $BCD$ ,

$\therefore AB \perp CD$  .....2 分

$\because$  点  $D$  是  $\odot O$  上异于  $B$ 、 $C$  的点,  $BC$  是  $\odot O$  的直径,

所以  $CD \perp BD$ , .....4 分

又  $AB \cap BD = B$ ,  $\therefore CD \perp$  平面  $ABD$  .....6 分

[解] (2) 在  $\text{Rt}\triangle BDC$  中,  $BD=2$ ,  $CD=4$ ,  $\angle BDC=90^\circ$ ,

$\therefore BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ , .....8 分

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{5})^2} = 4$  .....10 分

$\therefore$  圆柱  $O_1O$  的侧面积为:  $S_{\text{侧}} = BC \cdot \pi \cdot AB = 8\sqrt{5}\pi$ . .....14 分

18. [解] (1)  $f(x) = \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x$ , .....2 分

所以  $f(x) = 2 \sin(x + \frac{\pi}{4})$ , .....4 分

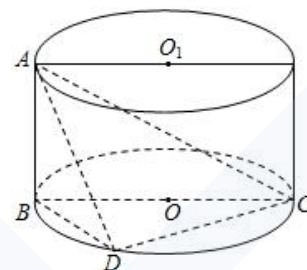
因为函数在  $[0, \frac{\pi}{4}]$  上是增函数, 在  $[\frac{\pi}{4}, \pi]$  上是减函数,

所以当  $x = \frac{\pi}{4}$  时,  $f(x)$  的最大值为 2, 当  $x = \pi$  时,  $f(x)$  的最小值为  $-\sqrt{2}$ .

所以函数  $f(x)$  的值域为  $[-\sqrt{2}, 2]$ . .....6 分

(2)  $f(\omega x) = 2 \sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) (\omega > 0)$  .....8 分

由  $f(\omega x) = \sqrt{3}$  得  $\sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,



所以  $\omega x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$  或  $\omega x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$  .....10 分

所以  $x = \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{12\omega}$  或  $\omega x = \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{5\pi}{12\omega} (k \in \mathbf{Z})$ .

由于方程  $f(\omega x) = \sqrt{3} (\omega > 0)$  在区间  $[0, \pi]$  上至少有两个不同的解，

所以只需  $\frac{\pi}{12\omega}, \frac{5\pi}{12\omega} \in [0, \pi]$ , .....12 分

解得  $\omega \geq \frac{5}{12}$ ，所以  $\omega$  的取值范围为  $\left[\frac{5}{12}, +\infty\right)$ . .....14 分

19. [解] (1) 若用函数  $f_1(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$  来拟合上述表格中的数据，

则  $\Delta(f_1(x)) = \frac{1}{5}[(2-2.2)^2 + (1-1)^2 + (2-2)^2 + (5-4.6)^2 + (10-7)^2]$  .....4 分

$= \frac{1}{5}(0.2^2 + 0^2 + 0^2 + 0.4^2 + 3^2) = 1.84$ ; .....6 分

(2) ①若用函数  $f_2(x) = 2^{|x-2|} + m$  来拟合上述表格中的数据，则

$\Delta(f_2(x)) = \frac{1}{5}[(2^{|1-2|} + m - 2.2)^2 + (2^{|2-2|} + m - 1)^2 + (2^{|3-2|} + m - 2)^2 + (2^{|4-2|} + m - 4.6)^2 + (2^{|5-2|} + m - 7)^2]$   
 $= m^2 + 0.08m + 0.28 = (m + 0.04)^2 + 0.2784 \geq 0.2784$ , .....10 分

则当  $m = -0.04$  时， $\Delta(f_2(x))$  的最小值为 0.2784，

此时  $f_2(x) = 2^{|x-2|} - 0.04$ . .....12 分

②由上可知，用  $f_2(x) = 2^{|x-2|} - 0.04$  来拟合上述表格中的数据更好，

因为拟合误差更小. ....14 分

20. [解] (1)  $\because$  椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过点  $(0, 2)$ ,  $b = 2$ , .....2 分

设焦距为  $2c$ ，由条件得  $(2a)^2 + (2b)^2 = 2(2c)^2$ ，

又  $a^2 = b^2 + c^2$ ，解得  $a^2 = 12$ 。

$\therefore$  椭圆  $\Gamma$  的标准方程为  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ . ....4 分

(2) 由题意， $P(0, 1), Q(1, 0)$ ，设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ，

$\because \overrightarrow{PM} = \lambda_1 \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{PN} = \lambda_2 \overrightarrow{NQ}$ ，

$\therefore (x_1, y_1 - 1) = \lambda_1(1 - x_1, -y_1), (x_2, y_2 - 1) = \lambda_2(1 - x_2, -y_2)$ ，

从而  $x_1 = \lambda_1(1 - x_1), x_2 = \lambda_2(1 - x_2)$ ，于是  $\lambda_1 = \frac{x_1}{1 - x_1}, \lambda_2 = \frac{x_2}{1 - x_2}$ ， .....6 分

$\therefore \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - 2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} - 2$ ，

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \text{得, } 4x^2 - 6x - 9 = 0, \therefore x_1 + x_2 = \frac{3}{2}, x_1 x_2 = -\frac{9}{4}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - 2 = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} - 2 = -\frac{8}{3}; \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(3) 显然直线  $l$  的斜率  $k$  存在且不为零,

设直线  $l$  的方程为  $y = k(x - m) (m > 0)$ ,  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 则:  $P(0, -km), Q(m, 0)$

由  $\overline{PM} = \lambda_1 \overline{MQ}$  得  $(x_1, y_1 + km) = \lambda_1(m - x_1, -y_1)$ , 注意到  $x_1 \neq m$

$$\therefore x_1 = \lambda_1(m - x_1), \text{ 从而 } \lambda_1 = \frac{x_1}{m - x_1}, \text{ 同理 } \lambda_2 = \frac{x_2}{m - x_2}, \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \lambda_1 + \lambda_2 = -3, \therefore x_1 x_2 - 2m(x_1 + x_2) + 3m^2 = 0 \dots\dots\dots ①,$$

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = k(x - m) \end{cases}, \text{ 得 } (1 + 3k^2)x^2 - 6k^2mx + 3k^2m^2 - 12 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = 36k^4m^2 - 4(1 + 3k^2)(3k^2m^2 - 12) = 12(12k^2 + 4 - k^2m^2) > 0 \dots\dots\dots ②,$$

$$\text{且 } x_1 + x_2 = \frac{6k^2m}{1 + 3k^2}, x_1 x_2 = \frac{3k^2m^2 - 12}{1 + 3k^2} \dots\dots\dots ③ \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{③代入①得 } \frac{3k^2m^2 - 12}{1 + 3k^2} - 2m \cdot \frac{6k^2m}{1 + 3k^2} + 3m^2 = 0 \Rightarrow \frac{3m^2 - 12}{1 + 3k^2} = 0, \therefore m = 2, \text{ (满足②)}$$

故直线  $l$  的方程为  $y = k(x - 2)$ , 所以直线  $l$  恒过定点  $(2, 0)$ .  $\dots\dots\dots 16 \text{ 分}$

(3) 另解: 由题意设  $P(0, m), Q(x_0, 0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ,

由  $\overline{PM} = \lambda_1 \overline{MQ}$ , 知  $(x_1, y_1 - m) = \lambda_1(x_0 - x_1, -y_1)$ , 注意到  $y_1 y_2 \neq 0$

$$\therefore y_1 - m = -y_1 \lambda_1, \text{ 从而 } \lambda_1 = \frac{m}{y_1} - 1, \text{ 同理 } \lambda_2 = \frac{m}{y_2} - 1, \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \lambda_1 + \lambda_2 = -3, \therefore y_1 y_2 + m(y_1 + y_2) = 0 \dots\dots\dots ①,$$

显然直线  $l$  的斜率  $k$  存在且不为零, 不妨设直线  $l$  的方程为  $x = t(y - m)$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = t(y - m) \end{cases}, \text{ 得 } (t^2 + 3)y^2 - 2mt^2y + t^2m^2 - 12 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = 4m^2t^4 - 4(t^2 + 3)(t^2m^2 - 12) > 0 \dots\dots\dots ②, \text{ 且 } y_1 + y_2 = \frac{2mt^2}{t^2 + 3}, y_1 y_2 = \frac{t^2m^2 - 12}{t^2 + 3} \dots\dots\dots ③, \dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{③代入①得 } t^2m^2 - 12 + 2m^2t^2 = 0, \therefore (mt)^2 = 4,$$

$\therefore$  直线  $l$  与  $x$  轴正半轴和  $y$  轴分别交于点  $Q, P$ ,

$$\therefore -mt > 0, \therefore mt = -2 \text{ (满足②)},$$

直线  $l$  的方程为  $x = ty + 2$ , 所以直线  $l$  恒过定点  $(2, 0)$ .  $\dots\dots\dots 16 \text{ 分}$

21. [证明] (1) 设  $\{b_n\}$  的公差为  $d$ , 则  $a_{n+1} - a_n = \lambda(b_{n+1} - b_n) = \lambda d (n \in \mathbf{N}^*)$ , ...2 分

故数列  $\{a_n\}$  是等差数列； .....4 分

[解] (2) 由  $b_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ ，可知  $\{b_n\}$  是周期为 4 的数列，即  $b_{n+4} = b_n$ ；

$$\begin{aligned} \text{由 } a_{n+4} - a_n &= (a_{n+4} - a_{n+3}) + (a_{n+3} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n) \\ &= \lambda(b_{n+4} - b_{n+3}) + \lambda(b_{n+3} - b_{n+2}) + \lambda(b_{n+2} - b_{n+1}) + \lambda(b_{n+1} - b_n) \\ &= \lambda(b_{n+4} - b_n) = 0, \text{ 即 } \{a_n\} \text{ 也是周期为 4 的数列.} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

又由  $a_1 = 2, b_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ ， $a_{n+1} - a_n = 3(b_{n+1} - b_n)$  可求：

$$a_2 = -1, a_3 = -4, a_4 = -1,$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -4, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S_{2021} = a_1 + (a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + \dots + (a_{2018} + a_{2019} + a_{2020} + a_{2021})$$

$$= a_1 + 505S_4 = -2018. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(3) 由  $b_n = \frac{b_{n-1} + b_{n-2}}{2} (n \geq 3, n \in \mathbf{N}^*)$  得  $b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{2}(b_n - b_{n-1}) (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$ ，

即  $\{b_{n+1} - b_n\}$  是以  $b_2 - b_1 = -\frac{\lambda}{2}$  为首项， $-\frac{1}{2}$  为公比的等比数列，

$$\text{则 } b_{n+1} - b_n = -\frac{\lambda}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \lambda \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } b_n = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \dots + (b_2 - b_1) + b_1$$

$$= \lambda \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \lambda \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \dots + \lambda \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \lambda$$

$$= \lambda \cdot \frac{1 \cdot \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\lambda}{3} + \frac{\lambda}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$$\text{则 } a_n = \lambda b_n + a_1 - \lambda b_1 = \frac{\lambda^2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \lambda - \frac{\lambda^2}{3}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

当  $n$  为奇数时， $a_n = \frac{\lambda^2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \lambda - \frac{\lambda^2}{3}$  单调递减，且  $\lambda - \frac{\lambda^2}{3} < a_n \leq \lambda$ ；

当  $n$  为偶数时， $a_n = -\frac{\lambda^2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \lambda - \frac{\lambda^2}{3}$  单调递增，且  $\lambda - \frac{\lambda^2}{2} \leq a_n < \lambda - \frac{\lambda^2}{3}$ ；

因为  $\lambda \neq 0$ ，故  $\lambda - \frac{\lambda^2}{2} < \lambda - \frac{\lambda^2}{3} < \lambda$ ，

所以  $\{a_n\}$  的最大值为  $a_1 = \lambda$ ，最小值为  $a_2 = \lambda - \frac{\lambda^2}{2}$ ， .....16 分



因为对  $\{a_n\}$  中的任意两项  $a_i, a_j (i, j \in \mathbf{N}^*)$ ,  $|a_i - a_j| < 2$  都成立,

所以  $a_1 - a_2 < 2$ ,

解得  $\lambda \in (-2, 0) \cup (0, 2)$

综上,  $\lambda$  的取值范围是  $(-2, 0) \cup (0, 2)$ . .....18 分