上海市静安区 2021 届高三一模数学试卷

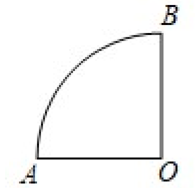
2021.01

一. 填空题（本大题共 8 题，每题 6 分，共 48 分）

1. 命题“若 $ab\neq 0$，则 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$”的逆否命题为________

2. $(2x^2-x^{-1})^6$ 的二项展开式的常数项是________（用数值表示）

3. 如图所示，弧长为 $\frac{\pi}{2}$，半径为 1 的扇形（及其内部）绕 OB 所在的直线旋转一周，所形成的几何体的表面积为________



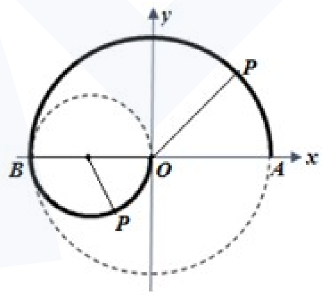
4. 设 i 是虚数单位，若 $\frac{1+a\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ 是纯虚数，则实数 $a=$________

5. 在△ABC 中，$AB=2$，$AC=1$，D 是 BC 边上的中点，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为________

6. 某校的“希望工程”募捐小组在假期中进行了一次募捐活动. 他们第一天得到 15 元，从第二天起，每一天收到的捐款数都比前一天多 10 元. 要募捐到不少于 1100 元，这次募捐活动至少需要________天.（结果取整）

7. 某校开设 9 门选修课程，其中 A，B，C 三门课程由于上课时间相同，至多选一门，若规定每位学生选修 4 门，则一共有________种不同的选修方案

8. 如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，动点 P 以每秒 $\frac{\pi}{2}$ 的角速度从点 A 出发，沿半径为 2 的上半圆逆时针移动到 B，再以每秒 $\frac{\pi}{3}$ 的角速度从点 B 沿半径为 1 的下半圆逆时针移动到坐标原点 O，则上述过程中动点 P 的纵坐标 y 关于时间 t 的函数表达式为________



二. 选择题（本大题共 3 题，每题 6 分，共 18 分）

9. 若 $a>b$，$c>d$，则下列不等式中必然成立的一个是（　　）

A. $a+d>b+c$　　B. $ac>bd$　　C. $d-a<c-b$　　D. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$

10. 下列四个选项中正确的是（　　）

A. 关于 x,y 的方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$（$D,E,F\in\mathbf{R}$）的曲线是圆

B. 设复数 z_1,z_2 是两个不同的复数，$a>0$，则关于复数 z 的方程 $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$ 的所有解在复平面上所对应的点的轨迹是椭圆

C. 设 A、B 为两个不同的定点，k 为非零常数，若 $|PA|-|PB|=k$，则动点 P 的轨迹为双曲线的一支

D. 双曲线 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{35}+y^2=1$ 有相同的焦点

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，α 、β 是位于不同象限的任意角，它们的终边交单位圆（圆心在坐标原点 O）于 A、B 两点. 若 A、B 两点的纵坐标分别为正数 a、b，且 $\cos(\alpha-\beta)\le 0$，则 $a+b$ 的最大值为（　　）

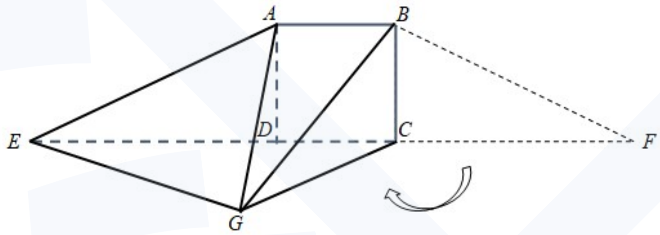
A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. 不存在

三. 解答题（本大题共 5 题，共 14+14+16+19+21=84 分）

12. 如图所示，等腰梯形 $ABFE$ 是由正方形 ABC 和两个全等的 Rt△FCB 和 Rt△EDA 组成，$AB=1$，$CF=2$. 现将 Rt△FCB 沿 BC 所在的直线折起，点 F 移至点 G，使二面角 $E-BC-G$ 的大小为 60°.

（1）求四棱锥 $G-ABCE$ 的体积;

（2）求异面直线 AE 与 BG 所成角的大小.



13. 设 $f(x)=\dfrac{a+2^x}{1-2^x}$，其中常数 $a\in\mathbf{R}$.

（1）设 $a=0$，$D=(1,+\infty)$，求函数 $y=f(x)$ （$x\in D$）的反函数;

（2）求证：当且仅当 $a=1$ 时，函数 $y=f(x)$ 为奇函数.

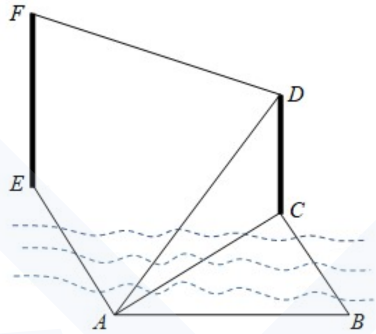
14. 如图所示，在河对岸有两座垂直于地面的高塔CD和EF. 张明在只有量角器（可以测量从测量人出发的两条射线的夹角）和直尺（可测量步行可抵达的两点之间的直线距离）的条件下，为了计算塔CD的高度，他在点A测得点D的仰角为$30°$，$\angle CAB=75°$，又选择了相距100米的B点，测得$\angle ABC=60°$.

（1）请你根据张明的测量数据求出塔CD高度；

（2）在完成（1）的任务后，张明测得$\angle BAE=90°$，并且又选择性地测量了两个角的大小（设为α、β）. 据此，他计算出了两塔顶之间的距离DF.

请问：① 张明又测量了哪两个角？（写出一种测量方案即可）

② 他是如何用α、β表示出DF的？（写出过程和结论）



15. $n^2(n\geq 5)$个正数排成n行n列方阵，其中每一行从左至右成等差数列，每一列从上至下都是公比为同一个实数q的等比数列. 已知$a_{12}=1$，$a_{14}=2$，$a_{55}=\dfrac{5}{32}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

（1）设$b_n=a_{1n}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）设$S_n=a_{11}+a_{21}+a_{31}+\cdots+a_{n1}$，

求证：$S_n<1\ (n\in\mathbf{N}^*)$；

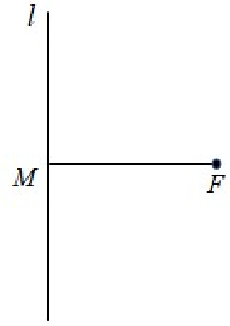
（3）设$T_n=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$，请用数学归纳法证明：$T_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

16. 如图所示，定点 F 到定直线 l 的距离 $MF=3$．动点 P 到定点 F 的距离等于它到定直线 l 距离的 2 倍. 设动点 P 的轨迹是曲线 Γ.

（1）请以线段 MF 所在的直线为 x 轴，以线段 MF 上的某一点为坐标原点 O，建立适当的平面直角坐标系 xOy，使得曲线 Γ 经过坐标原点 O，并求曲线 Γ 的方程；

（2）请指出（1）中的曲线 Γ 的如下两个性质：① 范围；② 对称性. 并选择其一给予证明.

（3）设（1）中的曲线 Γ 除了经过坐标原点 O，还与 x 轴交于另一点 C，经过点 F 的直线 m 交曲线 Γ 于 A、B 两点，求证：$CA\perp CB$.



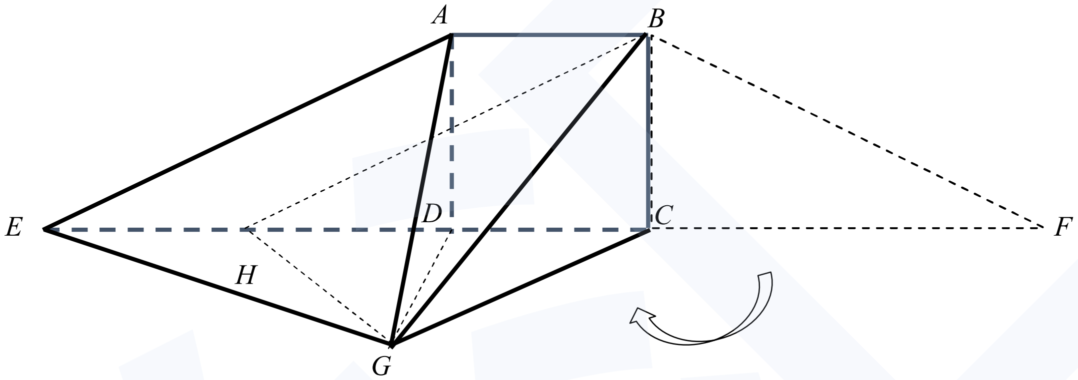
参考答案

一、 **1**．若 $a=0$ 或 $b=0$，则 $ab=0$． **2**．60； **3**．3π； **4**．2；

5．$-\frac{3}{2}$； **6**．14； **7**．75； **8**．$y=\begin{cases}2\sin\frac{\pi}{2}t, & t\in(0,2],\\ \sin\left[\frac{\pi}{3}(t-2)+\pi\right], & t\in(2,5].\end{cases}$

二、9．C； **10**．D； **11**．B．

三、12.



解：（1）由已知，有 $GC\perp BC, EC\perp BC$, 所以 $\angle ECG=60^\circ$．（1 分）

联结 DG，由 $CD=AB=1$，$CG=CF=2$，$\angle ECG=60^\circ$, 有 $DG\perp EF$ ①（1 分）

由 $BC\perp EF, BC\perp CG$, 有 $BC\perp$ 平面DEG, 所以，$DG\perp BC$ ②（1 分）

由① ② 知，$DG\perp$ 平面$ABCE$, 所以 DG 就是四棱锥 $G-ABCE$ 的高（1 分）

在 $\mathrm{Rt}\Delta CDG$ 中，$DG=2\times\sin 60^\circ=\sqrt{3}$．（1 分）

故，$V=\frac{1}{3}\times\left(1^2+\frac{1}{2}\times1\times2\right)\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$．（2 分）

（2）取 DE 的中点 H，联结 BH、GH，（1 分）

则 $BH // AE$，故 $\angle GBH$ 既是 AE 与 BG 所成角或其补角．（1 分）

在 ΔBGH 中，$BH=BG=\sqrt{5}$，$GH=\sqrt{DG^2+DH^2}=2$，（2 分）

则 $\cos\angle GBH=\frac{3}{5}$．（2 分）

故，异面直线 AE 与 BG 所成角的大小为 $\arccos\frac{3}{5}$．（1 分）

13．解：（1）由已知，设 $y=\frac{2^x}{1-2^x}$, 得 $x=\log_2\frac{y}{y+1}$．（2 分）

又 $y=\dfrac{2^x}{1-2^x}=-1+\dfrac{1}{1-2^x}$，所以，函数 $y=f(x)\,(x\in D)$ 单调递增. （2 分）

故，$f^{-1}(x)=\log_2\dfrac{x}{x+1}$，$x\in(-2,+\infty)$； （2 分）

（2）i)函数 $f(x)=\dfrac{a+2^x}{1-2^x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. （1 分）

若 $a=1$，$f(x)=\dfrac{1+2^x}{1-2^x}$，对于任意的 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，有

$f(-x)=\dfrac{1+2^{-x}}{1-2^{-x}}=-\dfrac{1+2^x}{1-2^x}=-f(x)$.

所以，$y=f(x)$ 是奇函数. （3 分）

ii) **方法 1**：由 $y=f(x)$ 是奇函数，有 $f(-1)=-f(1)$，解得 $a=1$. （4 分）

方法 2：若 $a\neq1$，则 $f(-1)=\dfrac{a+2^{-1}}{1-2^{-1}}=2a+1$，$f(1)=\dfrac{a+2}{1-2}=-a-2$，

$f(-1)\neq-f(1)$（否则 $a=1$），$f(x)$ 不是奇函数. （4 分）

方法 3：若 $f(x)$ 为奇函数，则，对于任意的 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，有

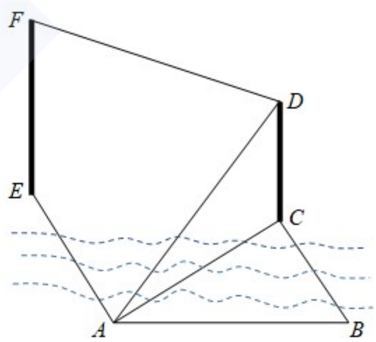
$f(-x)=-f(x)$，即，$\dfrac{a+2^{-x}}{1-2^{-x}}=-\dfrac{a+2^x}{1-2^x}$.

即 $(a-1)(2^x-1)=0$. $\therefore a=1$. （4 分）

14．解：（1）在 ΔABC 中，$\angle ACB=180^\circ-\angle CAB-\angle CBA=45^\circ$， （1 分）

由正弦定理，有 $\dfrac{AC}{\sin\angle CBA}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$，（3 分）

所以，$AC=\dfrac{100\times\sin60^\circ}{\sin45^\circ}=50\sqrt{6}$ 米. （2 分）



$CD=AC\tan\angle DAC$

$=50\sqrt{6}\cdot\tan30^\circ=50\sqrt{2}$ 米. （1 分）

（2）由（1）有 $AD=100\sqrt{2}$ 米.

测得 $\angle ABF=\alpha$，$\angle DAF=\beta$. （2 分）

由已知，有 $AB\perp EF$，$AB\perp AE$，

所以，$AB\perp$ 平面 AEF，得 $AB\perp AF$.

所以，$AF=AB\tan\alpha=100\tan\alpha$.（2 分）

在 ΔADF 中，由余弦定理，有

$DF=\sqrt{AD^2+AF^2-2AD\cdot AF\cos\beta}$ （3 分）

$=100\sqrt{2+\tan^2\alpha-2\sqrt{2}\tan\alpha\cos\beta}$ 米.（2 分）

【另解 1】测得 $\angle ABF=\alpha$，$\angle DBF=\beta$．解得，$BF=100\sec\alpha$，$BC=50(\sqrt{3}+1)$，

$BD=50\sqrt{6+2\sqrt{3}}$．在 ΔBDF 中，由余弦定理，有

$DF=50\sqrt{6+2\sqrt{3}+4\sec^2\alpha-4\sqrt{6+2\sqrt{3}}\sec\alpha\cos\beta}$ 米．（同样给分）

【另解 2】测得 $\angle ABE=\alpha$，$\angle EAF=\beta$． （2 分）

由已知，有 $AB\perp EF$，$AB\perp AE$，

所以，$AB\perp$ 平面 AEF，得 $AB\perp AF$．

所以，$AE=100\tan\alpha$． （2 分）

在 ΔACE 中，由余弦定理，有

$EC=\sqrt{10000\tan^2\alpha+15000-10000\sqrt{6}\tan\alpha\cos15^\circ}$ 米． （2 分）

$EF=100\tan\alpha\tan\beta$ 米． （1 分）

截取 $EG=CD$，则，$DF=\sqrt{FG^2+EC^2}$

$=50\sqrt{(2\tan\alpha\tan\beta-\sqrt{2})^2+4\tan^2\alpha+6-(6+2\sqrt{3})\tan\alpha}$ 米． （2 分）

【另解 3】测得 $\angle ABE=\alpha$，$\angle EBF=\beta$． （2 分）

由已知，有 $AB\perp EF$，$AB\perp AE$，

所以，$AB\perp$ 平面 AEF，得 $AB\perp AF$．

解得，$BE=100\sec\alpha$． （2 分）

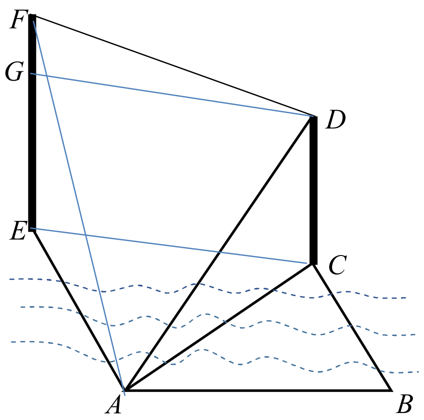
在 ΔACE 中，由余弦定理，有

$EC=\sqrt{10000\tan^2\alpha+15000-10000\sqrt{6}\tan\alpha\cos15^\circ}$ 米． （2 分）

$EF=100\sec\alpha\tan\beta$ 米． （1 分）

截取 $EG=CD$，则，

$DF=\sqrt{FG^2+EC^2}=50\sqrt{(2\sec\alpha\tan\beta-\sqrt{2})^2+4\tan^2\alpha+6-(6+2\sqrt{3})\tan\alpha}$ 米． （2 分）



15． 解：（1）由题意，数列$\{b_n\}$是等差数列，设首项为a_1，公差为d，

由$a_{12}=1$，$a_{14}=2$得$\begin{cases}a_1+d=1,\\ a_1+3d=2.\end{cases}$解得$a_1=\frac{1}{2}$，$d=\frac{1}{2}$．　（3 分）

故，数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n}{2}$．　（3 分）

（2）由（1）可得$a_{15}=\frac{5}{2}$，再由已知$a_{55}=\frac{5}{32}$，得

$\frac{5}{32}=\frac{5}{2}q^4$，解得$q=\pm\frac{1}{2}$，由题意舍去$q=-\frac{1}{2}$．　（3 分）

$$\therefore S_n=a_{11}+a_{21}+a_{31}+\cdots+a_{n1}=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

由指数函数的性质，有$S_n<1(n\in\mathbf{N}^*)$．　（3 分）

（3）（i）当$n=1$时，$T_1=\frac{1}{2}$，等式成立．　（1 分）

（ii）假设当$n=k$时等式成立，即，$T_k=2-\frac{k+2}{2^k}(k\in\mathbf{N}^*)$　（1 分）

当$n=k+1$时，$T_{k+1}=T_k+a_{(k+1)(k+1)}$

$$=T_k+a_{1(k+1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k=2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k=2-\frac{(k+1)+2}{2^{k+1}},$$

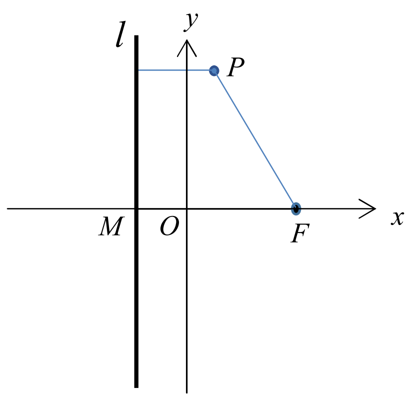
等式成立．　（4 分）

根据（i）和（ii）可以断定，$T_n=2-\frac{n+2}{2^n}$对任何的$n\in\mathbf{N}^*$都成立．（1 分）

16． 解：（1）在线段MF上取点O，使得$OF=2MO$，以点O为原点，以线段MF所在的直线为x轴建立平面直角坐标系xOy．　（2 分）

设动点P的坐标为(x,y)，则有$M(-1,0)$，$F(2,0)$，由题意，有

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2|x+1|,$$



整理得：$3x^2+12x-y^2=0$．　①　（4 分）

（2）① 范围：$x\geq 0$或$x\leq -4$，曲线Γ位于直线$x=0$与$x=-4$两侧．　（1 分）

② 对称性：

曲线Γ关于$y=0$成轴对称； （1 分）

曲线Γ关于$x=-2$成轴对称； （1 分）

曲线Γ关于$(-2,0)$成中心对称. （1 分）

范围证明：

$3(x+2)^2-y^2=12$，$3(x+2)^2=y^2+12\geq 12.$ （3 分）

对称性证明：

在方程① 中，把y换成$-y$，方程① 不变，

所以，曲线Γ关于$y=0$成轴对称； （1 分）

在方程① 中，把x换成$-4-x$，方程① 不变，

所以，曲线Γ关于$x=-2$成轴对称； （1 分）

在方程① 中，把y换成$-y$，或把x换成$-4-x$，方程① 不变，

所以，曲线Γ关于$(-2,0)$成中心对称； （1 分）

（3）将$y=0$代入$3x^2+12x-y^2=0$，解得$x=-4$，$x=0$（舍）.

所以$C(-4,0)$. （1 分）

（i）若直线l垂直于x轴:

将$x=2$代入$3x^2+12x-y^2=0$，解得$y=\pm 6$，

此时，$A(2,6)$、$B(2,-6)$．所以，$\overrightarrow{CA}=(6,6)$，$\overrightarrow{CB}=(6,-6)$.

$\because \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0, \therefore CA\perp CB$. （2 分）

（ii）若直线m不垂直于x轴:

设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{CA}=(x_1+4,y_1)$，$\overrightarrow{CB}=(x_2+4,y_2)$.

直线m的方程为$y=k(x-2)$，将其代入$3x^2+12x-y^2=0$，整理得，

$$(3-k^2)x^2+4(k^2+3)x-4k^2=0.$$ （1 分）

所以，$x_1+x_2=\dfrac{4(k^2+3)}{k^2-3}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-3}$. （1 分）

$\therefore y_1y_2=k^2(x_1-2)(x_2-2)=k^2[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4]=\dfrac{-36k^2}{k^2-3}$. （1 分）

$\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(x_1+4)(x_2+4)+y_1y_2=x_1x_2+4(x_1+x_2)+16+y_1y_2=0$. （1 分）

故，$CA\perp CB$. （1 分）