普陀区 2020 学年第一学期高三数学质量调研

2020.12

考生注意:

1. 本场考试时间 120 分钟. 试卷 4 页，满分 150 分，答题纸共 2 页.

2. 作答前，在答题纸正面填写姓名、准考证号，反面填写姓名，将核对后的条形码贴在答题纸指定位置.

3. 所有作答务必填涂或书写在答题纸上或试卷题号对应的区域，不得错位. 在试卷上作答一律不得分.

4. 用 2B 铅笔作答选择题，用黑色字迹钢笔、水笔或圆珠笔作答非选择题.

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1—6 题每题 4 分，第 7—12 题每题 5 分）

考生应在答题纸的相应位置直接填写结果.

1. 若集合 $A=\{x\,|\,0<x\le 1\}$，$B=\{x\,|\,(x-1)(x-2)\le 0, x\in \mathrm{R}\}$，则 $A\cup B=$________.

2. 函数 $y=x^2$（$x\ge 0$）的反函数为________.

3. 若 $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 且 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$，则 $\tan\alpha=$________.

4. 设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的各项和为 2，若该数列的公比为 $\dfrac{1}{2}$，则 $a_3=$________.

5. 在 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^8$ 的二项展开式中 x^4 项的系数为________.

（第 10 题图）

6. 若正方体的棱长为 1，则该正方体的外接球的体积为________.

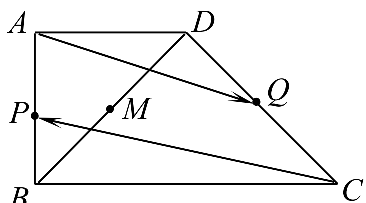
7. 若圆 C 以椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 的右焦点为圆心、长半轴为半径，则圆 C 的方程为________.

8. 一个袋中装有同样大小、质量的 10 个球，其中 2 个红色、3 个蓝色、5 个黑色. 经过充分混合后，若从此袋中任意取出 4 个球，则三种颜色的球均取到的概率为________.

9. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}-\lg x$，则不等式 $f(\dfrac{1}{x}-1)<1$ 的解集为________.

10. 某展馆现有一块三角形区域可以布展，经过测量其三边长分别为 14、10、6（单位：m），且该区域的租金为每天 4 元/m^2. 若租用上述区域 5 天，则仅场地的租用费约需________元.（结果保留整数）

11. 如图所示，在直角梯形 $ABCD$ 中，已知 $AD\,//\,BC$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，$AB=AD=1$，$BC=2$，$M$ 为 BD 的中点. 设 P、Q 分别为线段 AB、CD 上的动点，若 P、M、Q 三点共线，则 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{CP}$ 的最大值为________.



（第 11 题图）

12. 设 b、c 均为实数，若函数 $f(x)=x+\dfrac{b}{x}+c$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上有零点，则 b^2+c^2 的取值范围是________.

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 20 分，每题 5 分） 每题有且只有一个正确选项. 考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑.

13.曲线 $y^2=8x$ 的准线方程是（　　）.

A. $x=4$　　　*B*. $x=2$　　　*C*. $x=-2$　　　*D*. $x=-4$

14.设 x 、 y 均为实数，且 $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & y \end{vmatrix} = 7$，则在以下各项中 (x,y) 的可能取值只能是（　　）.

A. $(2,1)$　　　*B*. $(2,-1)$　　　*C*. $(-1,2)$　　　*D*. $(-1,-2)$

15. 如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面边长 $AB=2$，高 $A_1A=4$，E 为棱 A_1A 的中点.设 $\angle BAD=\alpha$ 、$\angle BED=\theta$ 、$\angle B_1ED=\gamma$，则 α 、β 、γ 之间的关系正确的是（　　）.

(A) $\alpha=\gamma>\theta$　　　*B*. $\gamma>\alpha>\theta$　　　*C*. $\theta>\gamma>\alpha$　　　*D*. $\alpha>\theta>\gamma$

16.设 b 、 c 均为实数，关于 x 的方程 $x^2+b|x|+c=0$ 在复数集 C 上给出下列两个结论：

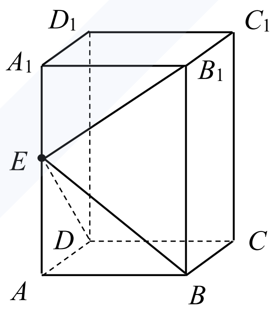
①存在 b 、 c，使得该方程仅有两个共轭虚根；

②存在 b 、 c，使得该方程最多有 6 个互不相等的根.

其中正确的是（　　）.

A.①与②均正确　　　*B*.①正确，②不正确

C.①不正确，②正确　　　*D*.①与②均不正确



（第 15 题图）

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 76 分） 解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17.（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

设 a 为常数，函数 $f(x)=a\sin 2x+\cos(2\pi-2x)+1$（ $x\in \mathrm{R}$ ）

（1）设 $a=\sqrt{3}$，求函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间及频率 f；

（2）若函数 $y=f(x)$ 为偶函数，求此函数的值域.

18.（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

双曲线Γ：$\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，直线$l$经过$F_2$且与$\Gamma$的两条渐近线中的一条平行，与另一条相交且交点在第一象限.

（1）设P为Γ右支上的任意一点，求$|PF_1|$的最小值；

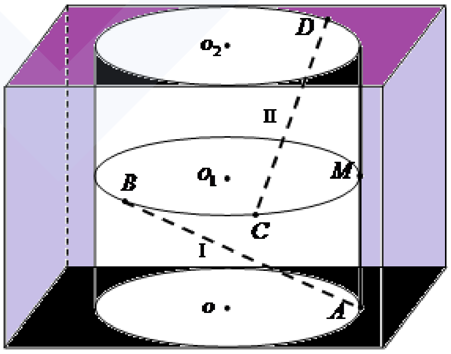
（2）设O为坐标原点，求O到l的距离，并求l与Γ的交点坐标.

19.（本题满分 14 分，第 1 小题满分 7 分，第 2 小题满分 7 分）

某商场共有三层楼，在其圆柱形空间内安装两部等长的扶梯Ⅰ、Ⅱ供顾客乘用. 如图，一顾客自一楼点A处乘Ⅰ到达二楼的点B处后，沿着二楼面上的圆弧BM逆时针步行至点C处，且C为弧BM的中点，再乘Ⅱ到达三楼的点D处. 设圆柱形空间三个楼面圆的中心分别为O、O_1、O_2，半径为8米，相邻楼层的间距$AM=4$米，两部电梯与楼面所成角的大小均为$\arcsin\dfrac{1}{3}$.

（1）求此顾客在二楼面上步行的路程；

（2）求异面直线AB和CD所成角的大小（结果用反三角函数值表示）.



（第 19 题图）

20.（本题满分 16 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 6 分）

已知无穷数列$\{a_n\}$的首项为a_1，其前n项和为S_n，且$a_{n+1}-a_n=d$（$n\in\mathrm{N}^*$），其中d为常数且$d\neq 0$.

（1）设$a_1=d=1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式，并求$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{a_n})$的值；

（2）设$d=2$，$S_7=-7$，是否存在正整数k使得数列$\{n\cdot S_n\}$中的项$k\cdot S_k<\sqrt{2}$成立？若存在，求出满足条件k的所有值；若不存在，请说明理由.

（3）求证：数列$\{a_n\}$中不同的两项之和仍为此数列中的某一项的充要条件为存在整数m且$m\geq -1$，使得$a_1=md$.

21.（本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分）

已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x}, x\le 0\\ \log_2 x, x>0\end{cases}$

（1）解不等式 $x\cdot f(x)\le 0$；

（2）设 k 、 m 均为实数，当 $x\in(-\infty,m]$ 时， $f(x)$ 的最大值为 1，且满足此条件的任意实数 x 及 m 的值，使得关于 x 的不等式 $f(x)\le m^{2}-(k-2)m+3k-10$ 恒成立，求 k 的取值范围；

（3）设 t 为实数，若关于 x 的方程 $f\left[f(x)\right]-\log_2(t-x)=0$ 恰有两个不相等的实数根 x_1 、 x_2 且 $x_1<x_2$，试将 $2^{x_1}+\log_2 x_2+\dfrac{1}{2-|x_1-1|+|x_2-1|}$ 表示为关于 t 的函数，并写出此函数的定义域.

普陀区 2020 学年第一学期高三数学质量调研评分细则

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1--6 题每题 4 分，第 7—12 题每题 5 分）

考生应在答题纸的相应位置直接填写结果.

1. $(0,2]$　2. $y=x^{\frac{1}{2}}$（$x\ge 0$）　3. $-2\sqrt{2}$　4. $\frac{1}{4}$　5. 28　6. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

7. $(x-2)^2+y^2=16$　8. $\frac{1}{2}$　9. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　10. 520　11. -2　12. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 20 分，每题 5 分） 每题有且只有一个正确选项. 考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑.

题号	13	14	15	16
答案	C	B	B	A

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 76 分） 解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17. **（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）**

【解】（1）当 $a=\sqrt{3}$ 时，$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+1=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$……2 分

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6}$，所以此函数的单调递增区间为

$\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，$k\in Z$． ……4 分 频率 $f=\frac{2}{2\pi}=\frac{1}{\pi}$.……6 分

（2）定义域 $D=\mathrm{R}$，因为函数 $y=f(x)$ 为偶函数，所以对于任意的 $x\in\mathrm{R}$，均有 $f(-x)=f(x)$ 成立.……7 分即

$a\sin(-2x)+\cos(-2x)+1=a\sin 2x+\cos 2x+1$……9 分

也即 $2a\sin 2x=0$ 对于任意实数 x 均成立，只有 $a=0$.……11 分

此时 $f(x)=\cos 2x+1$，因为 $-1\le\cos 2x\le 1$，……12 分

所以 $0\le 1+\cos 2x\le 2$，故此函数的值域为 $[0,2]$.……14 分

18.（1）根据题设条件，可得 $F_1(-5,0)$.设 $P(x_0,y_0)$，其中 $x_0\ge 4$,且 ${y_0}^2=\frac{9}{16}{x_0}^2-9$……2 分

$|PF_1|=\sqrt{(x_0+5)^2+{y_0}^2}=|\frac{5}{4}x_0+4|$，$x_0\ge 4$……4 分

所以当 $x_0=4$ 时，$|PF_1|_{\min}=9$.…………6 分

（2）$F_2(5,0)$，Γ 的两条渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$，……8 分

根据题设条件，可得 l：$3x+4y-15=0$.……9 分

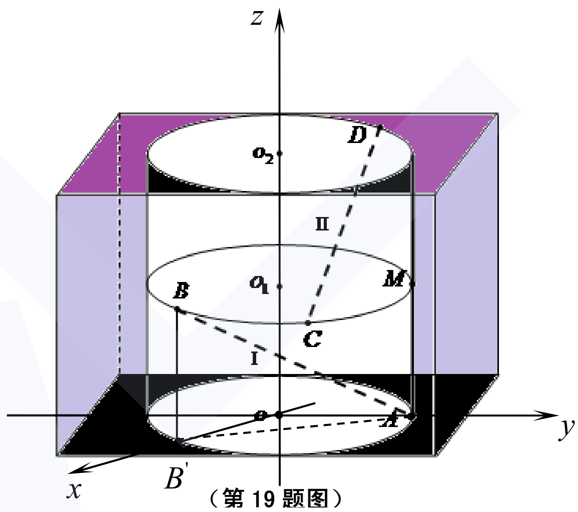
O 到 l 的距离 $d=\dfrac{|3\times 0+4\times 0-15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$.……10 分

将 l 与 Γ 的方程联立，得 $\begin{cases}3x+4y-15=0\\9x^2-16y^2=144\end{cases}$ ……11 分，消去 y 得，$10x=41$，……12 分

解得 $x=4.1$，代入得 $y=0.675$，所以 l 与 Γ 的交点坐标为 $(4.1,0.675)$.……14 分

19.（1）过点 B 作 1 楼面的垂线，垂足为 B' ,则 B' 落在圆柱底面圆上，连接 $B'A$，则 $B'A$ 即为 BA 在圆柱下底面上的射影，所以 $\angle BAB'$ 即为 BA 与楼面所成的角，即 $\angle BAB'=\arcsin\dfrac{1}{3}$.……2 分

$BB'=AM=4$，可得 $AB=8\sqrt{2}$ ……3 分. △ AOB' 中，$OA=OB'=8$,所以△ AOB' 是等腰直角三角形.故 $\angle BO_1M=\angle\ AOB'=\dfrac{\pi}{2}$.……5 分



（第 19 题图）

又因为 $AB=CD$，所以弧 BC 的长为 $8\times\dfrac{\pi}{4}=2\pi$，所以此顾客在二楼面上步行的路程为 2π 米.…7 分

（2）由（1）可知 OA,OB',OO_2 两两互相垂直相交，于是以 O 为坐标原点，以射线 OB',OA,OO_2 分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，如图所示.……8 分

易得 $B(8,0,4)$, $A(0,8,0)$, $C(4\sqrt{2},4\sqrt{2},4)$,

$D(-4\sqrt{2},4\sqrt{2},8)$,**向量** $\overrightarrow{AB}=(8,-8,4)$,

$\overrightarrow{CD}=(-8\sqrt{2},0,4)$ ……**10 分**

设异面直线 AB **和** CD **所成角的大小为** θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{4\sqrt{2}-1}{9}>0$，……12 分

即 $\theta=\arccos\dfrac{4\sqrt{2}-1}{9}$，所以异面直线 AB 和 CD 所成角的大小为 $\arccos\dfrac{4\sqrt{2}-1}{9}$.…………14 分

20. 解（1）由 $a_{n+1}-a_n=1$，得数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项、1 为公差的等差数列.

故 $a_n=n$ （$n\in\mathrm{N}^*$） .……2 分；$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{a_n})=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})=1$ ……4 分.

（2）$\{a_n\}$ 是等差数列，$S_7=7a_4=-7$，得 $a_4=-1$，又因为 $d=2$，所以 $a_1=-7$.

故 $S_n=\dfrac{d}{2}n^2+(a_1-\dfrac{d}{2})n=n^2-8n$，所以 $n\cdot S_n=n^3-8n^2$ （$n\in\mathrm{N}^*$） ……6 分

$k\cdot S_k=k^3-8k^2=k^2(k-8)<\sqrt{2}$

当 $k=1,2,3,4,5,6,7,8$ 时，$k\cdot S_k\le 0<\sqrt{2}$,不等式成立…………8 分；

当 $k\ge 9, k\cdot S_k\ge k^2>\sqrt{2}$ 时，不等式都不成立。

所以满足条件的所有的 k 的值为 $1,2,3,4,5,6,7,8$.……10 分

（3）①先证必要性：任取等差数列 $\{a_n\}$ 中不同的两项 a_s 和 a_t （$s\ne t$），存在 k，使得 $a_s+a_t=a_k$，则 $2a_1+(s+t-2)d=a_1+(k-1)d$，得 $a_1=(k-s-t+1)d$，故存在 m，使得 $m=k-s-t+1$，使得 $a_1=md$，$m\in Z$.……12 分

再证 $m\ge -1$：运用反证法.假设当 $d\ne 0$ 时，$m\ge -1$ 不成立，则 $m<-1$ 恒成立.

对于不同的两项 a_1、a_2，应存在 a_l，使得 $a_1+a_2=a_l$，即 $(2m+1)d=md+(l-1)d$

故 $l=m+2$，又因为 m 是小于 -1 的整数，故 $l\le 0$.所以假设不成立，故 $m\ge -1$.

②再证充分性：当 $a_1=md$，$m\ge -1$，$m\in Z$，任取等差数列 $\{a_n\}$ 中不同的两项 a_s 和 a_t （$s\ne t$）

$a_s+a_t=2a_1+(s+t-2)d=a_1+(s+t+m-2)d$

因为 $s+t+m-2\ge 0$ 且 $s+t+m-2\in Z$

所以 $a_1+(s+t+m-2)d=a_{s+t+m-1}$

综上①②可得，等差数列 $\{a_n\}$ 中不同的两项之和仍为此数列中的某一项的充要条件为存在整数 m 且 $m\ge -1$，使得 $a_1=md$ 得证.……16 分

21.【解】（1）当 $x\le 0$ 时，$f(x)=2^x$，代入 $x\cdot f(x)\le 0$，得 $x\cdot 2^x\le 0$，因为 $2^x>0$，所以 $x\le 0$；……1 分 当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_2 x$，代入 $x\cdot f(x)\le 0$，得 $x\cdot\log_2 x\le 0$，所以 $\log_2 x\le 0$，解得 $0<x\le 1$ ……2 分.故原不等式的解集为 $(-\infty,1]$.…………4 分

（2）当 $x\in(-\infty,m]$ 时，$f(x)_{\max}=1$，故 $0\le m\le 2$.…………6 分

要使得不等式 $f(x)\le m^2-(k-2)m+3k-10$ 恒成立，需使 $m^2-(k-2)m+3k-10\ \ge 1$，即 $m^2-(k-2)m+3k-11\ge 0$ 对于任意的 $m\in[0,2]$ 都成立.

因为 $1\le 3-m\le 3$，所以 $k\ge (m-3)+\dfrac{4}{m-3}+8$.…………7 分

由 $3-m>0$，$\dfrac{4}{3-m}<0$ 得 $(m-3)+\dfrac{4}{m-3}+8\le -4+8=4$ （当且仅当 $m=1$ 时，等号成立）

……9 分 所以 $k\ge 4$ …………10 分

（3）由函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\le 0\\ \log_2 x, x>0\end{cases}$，得 $f\left(f(x)\right)=\begin{cases}x, x\le 1\\ \log_2\left(\log_2 x\right), x>1\end{cases}$ ……12 分

①若 $x\le 1$，则方程 $f\left[f(x)\right]-\log_2(t-x)=0$ 变为 $x=\log_2(t-x)$，即 $2^x=t-x$，且 $1<t\le 3$；…13 分

②若 $x>1$，则方程 $f\left[f(x)\right]-\log_2(t-x)=0$ 变为 $\log_2\left(\log_2 x\right)=\log_2(t-x)$，即 $\log_2 x=t-x$，且 $t>1$……14 分

于是 x_1、x_2 分别是方程 $2^x=t-x$、$\log_2 x=t-x$ 的两个根且 $x_1\le 1<x_2<t$

由于函数 $y=\log_2 x$ 与 $y=2^x$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称，故 $x_1+x_2=t$ ……16 分

$2^{x_1}+\log_2 x_2=2t-(x_1+x_2)=t$，$\dfrac{1}{2-|x_1-1|+|x_2-1|}=\dfrac{1}{t}$

故 $2^{x_1}+\log_2 x_2+\dfrac{1}{2-|x_1-1|+|x_2-1|}=t+\dfrac{1}{t}$ 此函数的定义域为 $(1,3]$……18 分