浦东新区 2020 学年度第一学期期末教学质量检测

高三数学试卷 2020.12

考生注意：1、本试卷共 21 道试题，满分 150 分，答题时间 120 分钟；

2、请在答题纸上规定的地方解答，否则一律不予评分．

一、填空题（本大题满分 54 分）本大题共有 12 题，1-6 题每题 4 分，7-12 题每题 5 分．考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得 4 分或 5 分，否则一律得零分．

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=$________．

2．半径为 2 的球的表面积为________．

3．抛物线 $x^2=-4y$ 的准线方程为________．

4．已知集合 $A=\{x\,|\,x>0\}$，$B=\{x\,|\,x^2\le 1\}$，则 $A\cap B=$________．

5．已知复数 z 满足 $z(1-i)=4$（i 为虚数单位），则 $|z|=$________．

6．在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=2$，$\angle B=\dfrac{5\pi}{12}$，$\angle C=\dfrac{\pi}{4}$，则 $BC=$________．

7．函数 $f(x)=1+\log_2 x\ (x\ge 4)$ 的反函数的定义域为________．

8．在 $(x+\sqrt{2})^7$ 的二项展开式中任取一项，则该项系数为有理数的概率为________．（用数字作答）

9．正方形 $ABCD$ 的边长为 2，点 E 和 F 分别是边 BC 和 AD 上的动点，且 $CE=AF$，则 $\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{AF}$ 的取值范围为________．

10．若等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $\begin{vmatrix} a_{n+1} & S_n \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 为________．

11．设函数 $f\left(x\right)=|x-a|-\dfrac{2}{x}+a$，若关于 x 的方程 $f\left(x\right)=1$ 有且仅有两个不同的实数根，则实数 a 的取值构成的集合为________．

12．对于任意的正实数 a，b，则 $\dfrac{2\sqrt{2}a+\sqrt{a^2+9b^2}}{5a+3b}$ 的取值范围为__________．

二、选择题（本大题满分 20 分）本大题共有 4 题，每题有且只有一个正确答案．考生必须在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得 5 分，否则一律得零分．

13．若 a、b 是实数，则 $a>b$ 是 $2^a>2^b$ 的（　　）

$A.$充分非必要条件　　$B.$必要非充分条件

$C.$充要条件　　$D.$既非充分又非必要条件

14．若某线性方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 16 \end{pmatrix}$，则该线性方程组的解的个数为（　　）

$A.$ 0 个　　$B.$ 1 个　　$C.$ 无数个　　$D.$ 不确定

15．下列命题中正确的是（　　）

$A.$三点确定一个平面

$B.$垂直于同一直线的两条直线平行

$C.$若直线l与平面α上的无数条直线都垂直，则直线$l\perp\alpha$

$D.$若a、b、c是三条直线，$a//b$且与c都相交，则直线a、b、c共面.

16．已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2,(x\text{为无理数})\\ x,(x\text{为有理数})\end{cases}$，则以下4个命题：

①$f(x)$是偶函数；②$f(x)$在$\left[0,+\infty\right)$上是增函数；

③$f(x)$的值域为R；④对于任意的正有理数a，$g(x)=f(x)-a$存在奇数个零点.

其中正确命题的个数为（　　）

$A.$ 0　　$B.$ 1　　$C.$ 2　　$D.$ 3

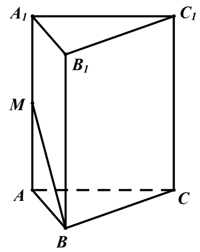
三、解答题（本大题满分76分）本大题共有5题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

17．（本题满分14分）.本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

如图，直三棱柱$A_1B_1C_1-ABC$中，$AB=AC=1,\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$，$A_1A=4$，点$M$为线段$A_1A$的中点.

（1）求直三棱柱$A_1B_1C_1-ABC$的体积；

（2）求异面直线BM与B_1C_1所成的角的大小.（结果用反三角表示）



18．（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})\ (\omega>0)$的最小正周期为$\pi$.

（1）求ω与$f(x)$的单调递增区间；

（2）在ΔABC中，若$f(\dfrac{A}{2})=1$，求$\sin B+\sin C$的取值范围.

19．（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分6分，第2小题满分8分.

勤俭节约是中华民族的传统美德．为避免舌尖上的浪费，各地各部门采取了精准供应的措施.某学校食堂经调查分析预测，从年初开始的前 $n(n=1,2,3,\cdots,12)$ 个月对某种食材的需求总量 S_n （公斤）近似地满足 $S_n=\begin{cases}635n & (1\le n\le 6)\\ -6n^2+774n-618 & (7\le n\le 12)\end{cases}$．为保证全年每一个月该食材都够用，食堂前 n 个月的进货总量须不低于前 n 个月的需求总量.

（1）如果每月初进货 646 公斤，那么前 7 个月每月该食材是否都够用？

（2）若每月初等量进货 p （公斤），为保证全年每一个月该食材都够用，求 p 的最小值.

20．（本题满分 16 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 6 分.

已知椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1, F_1$、$F_2$ 为 C_1 的左、右焦点.

（1）求椭圆 C_1 的焦距；

（2）点 $Q(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ 为椭圆 C_1 一点，与 OQ 平行的直线 l 与椭圆 C_1 交于两点 A、B，若 $\triangle QAB$ 面积为 1，求直线 l 的方程；

（3）已知椭圆 C_1 与双曲线 $C_2:x^2-y^2=1$ 在第一象限的交点为 $M(x_M,y_M)$，椭圆 C_1 和双曲线 C_2 上满足 $|x|\ge|x_M|$ 的所有点 (x,y) 组成曲线 C．若点 N 是曲线 C 上一动点，求 $\overrightarrow{NF_1}\cdot\overrightarrow{NF_2}$ 的取值范围.

21．（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分.

已知函数 $f(x)$ 的定义域是 D，若对于任意的 $x_1, x_2 \in D$，当 $x_1 < x_2$ 时，都有 $f(x_1) \le f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上为非减函数。

（1）判断 $f_1(x) = x^2 - 4x, (x \in [1,4])$ 与 $f_2(x) = |x-1| + |x-2|, (x \in [1,4])$ 是否是非 减函数?

（2）已知函数 $g(x) = 2^x + \dfrac{a}{2^{x-1}}$ 在 $[2,4]$ 上为非减函数，求实数 a 的取值范围.

（3）已知函数 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上为非减函数，且满足条件：① $h(0) = 0$，

② $h(\dfrac{x}{3}) = \dfrac{1}{2}h(x)$，③ $h(1-x) = 1 - h(x)$，求 $h(\dfrac{1}{2020})$ 的值.

浦东高三数学答案

2020.12

一、填空题

1．$\frac{1}{2}$　2．16π　3．$y=1$　4．$\{x\mid 0<x\le 1\}$　5．$2\sqrt{2}$　6．$\sqrt{6}$ 7．$[3,+\infty)$

8．$\frac{1}{2}$　9．$[0,1]$　10．$2^{n+1}-2$　11．$\left\{\frac{1-2\sqrt{2}}{2},\frac{1+2\sqrt{2}}{2},2\right\}$　12．$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

二、选择题

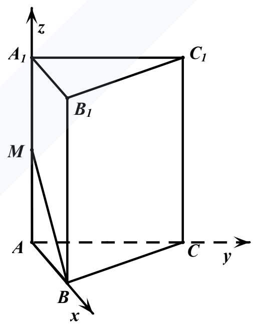
13． C　14． C　15． D　16．B

三、解答题

注：解答题其他解法相应给分

17．解：（1）因为 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$， $V_{A_1B_1C_1-ABC}=S_{\Delta ABC}\cdot A_1A$， 所以，$V_{A_1B_1C_1-ABC}=S_{\Delta ABC}\cdot A_1A=\frac{1}{2}\times 4=2$.

（2）法一：$\because BC/\!/B_1C_1$，



$\therefore \angle MBC$是异面直线 BM 与 B_1C_1 所成的角或其补角.

在 ΔMBC 中， $BM=CM=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{2}$ ，

由余弦定理得，$\cos\angle MBC=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \angle MBC=\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

$\therefore$ 异面直线 BM 与 B_1C_1 所成的角为 $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

法二：如图所示建系，

则 $B(1,0,0),B_1(1,0,3),M(0,0,2),C_1(0,1,3)$

$\overrightarrow{BM}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{B_1C_1}=(-1,1,0)$，$cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B_1C_1}\right|}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore$ 异面直线 BM 与 B_1C_1 所成的角为 $arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

18．解：（1）　$\omega=2$

$f(x)$ 的单调递增区间：$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 即 $k\pi-\frac{\pi}{3}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{6}$

$f(x)$ 的单调递增区间 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right]$ $k\in Z$

（2）$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

由 $f(\frac{A}{2})=1$，$\sin(A+\frac{\pi}{6})=1$，$A\in(0,\pi)$，$A=\frac{\pi}{3}$

由 $A+B+C=\pi$，$B+C=\frac{2\pi}{3}$，$B=\frac{2\pi}{3}-C$

$\sin B+\sin C=\sin(\frac{2\pi}{3}-C)+\sin C=\frac{3}{2}\sin C+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C=\sqrt{3}\sin(C+\frac{\pi}{6})$

$\because 0<C<\frac{2}{3}\pi,\therefore\frac{\pi}{6}<C+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，$\frac{1}{2}<\sin(C+\frac{\pi}{6})\le 1$

$\sin B+\sin C$ 的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right]$

19．解：（1）当 $1\le n\le 6$ 时，每月需求量 635 公斤，每月进货 646 公斤，1 到 6 月都够用；

当 $n=7$ 时，因为 $646\times 7-S_7=646\times 7-\left(-6\times 49+774\times 7-618\right)=16>0$，第 7 个月该食材够用.

所以，前 7 个月每月该食材都够用

（2）为保证该食材全年每一个月都够用，不等式 $pn\ge S_n$ 对 $n=1,2,\cdots,12$ 恒成立.

当 $1\le n\le 6$ 时，$pn\ge 635n$ 恒成立，可得 $p\ge 635$；当 $7\le n\le 12$ 时，$pn\ge -6n^2+774n-618$ 恒成立，即 $p\ge 774-6(n+\frac{103}{n})$ 恒成立，

当 $n=10$ 时，$774-6(n+\frac{103}{n})$ 的最大值为 652.2

可得 $p\ge 652.2$.

∴为保证全年每一个月该食材都够用，每月初进货量 p 的最小值为 652.2 公斤.

20．解：（1）$a=2$ $b=1$ 则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$. 则椭圆 C_1 的焦距为 $2\sqrt{3}$.

（2）由于 $k_{OQ}=\frac{1}{2}$，设 l 方程为 $y=\frac{1}{2}x+t$， $A\left(x_1,y_1\right),B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x+t\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，$x^2+2tx+2t^2-2=0$，

$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=-2t\\ x_1x_2=2t^2-2\\ \Delta=-4\left(t^2-2\right)>0\Rightarrow t^2<2\end{cases}$，

则 $|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{4t^2-4(2t^2-2)}=\sqrt{5}\sqrt{2-t^2}$．

又点 Q 到 l 的距离 $d=\frac{|t|}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{2|t|}{\sqrt{5}}$,-

$\therefore S_{\triangle QAB}=\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{2-t^2}\times\frac{2|t|}{\sqrt{5}}=1$，

解得 $t^2=1$，$t=\pm1$，

则直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x\pm1$.

（3）由 $\begin{cases}x^2+4y^2=4\\x^2-y^2=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_M=\frac{2\sqrt{10}}{5}\\y_M=\frac{\sqrt{15}}{5}\end{cases}$

设 $N\left(x,y\right)$ 是曲线 C 上一点，则

$F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{NF_1}=\left(-\sqrt{3}-x,-y\right)$，$\overrightarrow{NF_2}=\left(\sqrt{3}-x,-y\right)$，

所以，$\overrightarrow{NF_1}\cdot\overrightarrow{NF_2}=x^2+y^2-3$；

当点 N 在曲线 $x^2+4y^2=4(|x|\ge|x_M|)$ 上时，$\overrightarrow{NF_1}\cdot\overrightarrow{NF_2}=1-3y^2$，

当 $y=\frac{\sqrt{15}}{5}$ 时，$\left(\overrightarrow{NF_1}\cdot\overrightarrow{NF_2}\right)_{\min}=-\frac{4}{5}$，当 $y=0$ 时，$\left(\overrightarrow{NF_1}\cdot\overrightarrow{NF_2}\right)_{\max}=1$，

所以 $\overrightarrow{NF_1}\cdot\overrightarrow{NF_2}\in\left[-\frac{4}{5},1\right]$； -

当点 N 在曲线 $x^2-y^2=1(|x|\ge|x_M|)$ 上时，$\overrightarrow{NF_1}\cdot\overrightarrow{NF_2}=2y^2-2$；

当 $y=\frac{\sqrt{15}}{5}$ 时，$\left(\overrightarrow{NF_1}\cdot\overrightarrow{NF_2}\right)_{\min}=-\frac{4}{5}$，$\overrightarrow{NF_1}\cdot\overrightarrow{NF_2}\in\left[-\frac{4}{5},+\infty\right)$；

综上，$\overrightarrow{NF_1}\cdot\overrightarrow{NF_2}\in\left[-\frac{4}{5},+\infty\right)$.

21．解：（1）$f_1(x)$ 不是，$f_2(x)$ 是.

（因为 $f_1(1)>f_1(2)$， 则 $f_1(x)$ 不是 $\left[1,4\right]$ 上的非减函数.

$f_2(x)=\begin{cases}1,1\le x\le 2\\2x-3,2<x\le 4\end{cases}$，

$\forall x_1,x_2\in[1,2]$，且设 $1\le x_1<x_2\le 2$，则 $f_2(x_1)=f_2(x_2)$，显然满足 $f_2(x_1)\le f_2(x_2)$；

$\forall x_1,x_2\in(2,4]$，且设 $2<x_1<x_2\le 4$，则 $f_2(x_1)=2x_1-3<2x_2-3=f_2(x_2)$，显然满足 $f_2(x_1)\le f_2(x_2)$；

$\forall x_1 \in [1,2]$，$\forall x_2 \in (2,4]$，则 $f_2(x_1)=1, f_2(x_2)=2x_2-3>1$，显然满足 $f_2(x_1)\le f_2(x_2)$ 综上所述，$f_2(x)$ 是 $\left[1,4\right]$ 上的非减函数. ）

（2）$\forall x_1, x_2 \in [2,4]$，设 $2\le x_1<x_2\le 4$，则 $g(x_1)-g(x_2)\le 0$

$$g(x_1)-g(x_2)=2^{x_1}+\frac{2a}{2^{x_1}}-(2^{x_2}+\frac{2a}{2^{x_2}})$$
$$=2^{x_1}-2^{x_2}+(\frac{2a}{2^{x_1}}-\frac{2a}{2^{x_2}})=2^{x_1}-2^{x_2}+\frac{2a}{2^{x_1}2^{x_2}}(2^{x_2}-2^{x_1})$$
$$=(2^{x_1}-2^{x_2})(1-\frac{2a}{2^{x_1}2^{x_2}})\le 0$$

则 $\forall x_1, x_2 \in [2,4]$，设 $2\le x_1<x_2\le 4$，不等式 $1-\frac{2a}{2^{x_1}2^{x_2}}\ge 0$ 恒成立，

即：$2a\le 2^{x_1}2^{x_2}$.

则 $a\le 8$.

（3）$h(1)+h(0)=1\Rightarrow h(1)=1$

$$\Rightarrow h(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}h(1)=\frac{1}{2}$$
$$h(\frac{2}{3})=1-h(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}$$

得出：$h(\frac{1}{3})=h(\frac{2}{3})=\frac{1}{2}$

$\forall x\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，因为函数 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上为非减函数，

所以 $h(\frac{1}{3})\le h(x)\le h(\frac{2}{3})$

所以 $\frac{1}{2}\le h(x)\le\frac{1}{2}$

得到：$\forall x\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}], h(x)\equiv\frac{1}{2}$

由 $(ii) h(\frac{x}{3})=\frac{1}{2}h(x)$ 知，$h(x)=\frac{1}{2}h(3x)$

$$h(\frac{1}{2020})=\frac{1}{2}h(\frac{3}{2020})=\cdots=\frac{1}{64}h(\frac{729}{2020})$$
$$\therefore h(\frac{1}{2020})=\frac{1}{128}.$$