青浦区 2020 学年第一学期高三年级期终学业质量调研测试

数 学 试 卷

（时间 120 分钟，满分 150 分） Q2020.12

学生注意：

1. 本试卷包括试题纸和答题纸两部分.

2. 在试题纸上答题无效，必须在答题纸上的规定位置按照要求答题.

3. 可使用符合规定的计算器答题.

一、填空题（本大题满分 54 分）本大题共有 12 题，1-6 每题 4 分，7-12 每题 5 分考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得分，否则一律得零分.

1．已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{0,2,4,6,8\}$，则 $A\cap B=$________.

2．函数 $y=2^x$ 的反函数是________.

3．行列式 $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$ 中，元素 3 的代数余子式的值为________.

4．已知复数 z 满足 $z+\dfrac{4}{z}=0$，则 $|z|=$________.

5．圆锥底面半径为 $1cm$，母线长为 $2cm$，则其侧面展开图扇形的圆心角 $\theta=$________.

6．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，公差 $d=2$，其前 n 项和为 S_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a_n)^2}{S_n}=$________.

7．我国南北朝数学家何承天发明的“调日法”是程序化寻求精确分数来表示数值的算法，其理论依据是：设实数 x 的不足近似值和过剩近似值分别为 $\dfrac{b}{a}$ 和 $\dfrac{d}{c}$ $(a,b,c,d\in\mathbf{N}^*)$，则 $\dfrac{b+d}{a+c}$ 是 x 的更为精确的近似值．已知 $\dfrac{157}{50}<\pi<\dfrac{22}{7}$，试以上述 π 的不足近似值 $\dfrac{157}{50}$ 和过剩近似值 $\dfrac{22}{7}$ 为依据，那么使用两次“调日法”后可得 π 的近似分数为________.

8．在二项式 $(\sqrt{x}+\dfrac{1}{ax^2})^5\ (a>0)$ 的展开式中 x^{-5} 的系数与常数项相等，则 a 的值是________.

9．点 A 是椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 与双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的一个交点，点 F_1,F_2 是椭圆 C_1 的两个焦点，则 $|AF_1|\cdot|AF_2|$ 的值为________.

10．盒子中装有编号为 $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 的九个大小、形状、材质均相同的小球，从中随机任意取出两个，则这两个球的编号之积为偶数的概率是________.（结果用最简分数表示）

11．记 a_m 为数列 $\{3^n\}$ 在区间 $(0,m]$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 中的项的个数，则数列 $\{a_m\}$ 的前 100 项的和 $S_{100}=$________.

12．已知向量 $\vec{e}$ 的模长为 1，平面向量 $\vec{m},\vec{n}$ 满足：$|\vec{m}-2\vec{e}|=2,|\vec{n}-\vec{e}|=1$，则 $\vec{m}\cdot\vec{n}$ 的取值范围是________.

二、选择题（本大题满分 20 分）本大题共有 4 题，每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得 5 分，否则一律得零分.

13．已知$a,b\in \mathbf{R}$，则“$a=b$”是“$\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$”的……………………………（　　）.

*A.*充分不必要条件　　*B.*必要不充分条件

*C.*充要条件　　*D.*既不充分也不必要条件

14．类比平面内“垂直于同一条直线的两条直线互相平行”的性质，可推出空间中有下列结论：

①垂直于同一条直线的两条直线互相平行；

②垂直于同一条直线的两个平面互相平行；

③垂直于同一个平面的两条直线互相平行；

④垂直于同一个平面的两个平面互相平行.

其中正确的是………………………………………………………………………（　　）.

*A.*①②　　*B.*①④　　*C.*②③　　（D）③④

15．已知顶点在原点的锐角α绕原点逆时针转过$\dfrac{\pi}{6}$后，终边交单位圆于$P(-\dfrac{1}{3},y)$，则$\sin\alpha$的值为……（　　）.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$　　*B.* $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$　　*C.* $\dfrac{2\sqrt{6}-1}{6}$　　*D.* $\dfrac{2\sqrt{6}+1}{6}$

16．设函数$f(x)=\begin{cases}-x, & x\in P\\ \dfrac{1}{x}, & x\in M\end{cases}$，其中$P,M$是实数集$\mathbf{R}$的两个非空子集，又规定$A(P)=\{y|y=f(x),x\in P\}$，$A(M)=\{y|y=f(x),x\in M\}$，则下列说法：

（1）一定有$A(P)\cap A(M)=\varnothing$；（2）若$P\cup M\neq \mathbf{R}$，则$A(P)\cup A(M)\neq \mathbf{R}$；

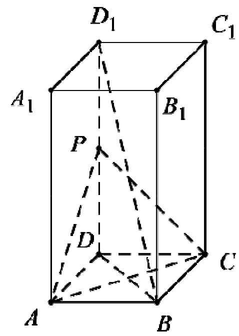
（3）一定有$P\cap M=\varnothing$；（4）若$P\cup M=\mathbf{R}$，则$A(P)\cup A(M)=\mathbf{R}$.

其中正确的个数是…………………………（　　）.

A. 1　　*B.* 2　　*C.* 3　　*D.* 4

三．解答题（本大题满分 76 分）本大题共有 5 题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

17.（本题满分 14 分）本题共 2 小题，第（1）小题 6 分，第（2）小题 8 分.



如图，长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AD=1$，$AA_1=2$，点 P 为DD_1的中点.

（1）求证：直线BD_1// 平面PAC；

（2）求异面直线BD_1与AP所成角的大小.

18．（本题满分 14 分）第（1）小题满分 6 分，第（2）小题满分 8 分.

设函数 $f(x)=x^2+|x-a|$，a 为常数.

（1）若 $f(x)$ 为偶函数，求 a 的值；

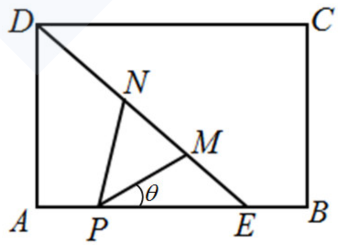
（2）设 $a>0$，$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，$x\in(0,a]$ 为减函数，求实数 a 的取值范围.

19.（本题满分 14 分）本题共 2 小题，第（1）小题 6 分，第（2）小题 8 分.

如图，矩形 $ABCD$ 是某个历史文物展览厅的俯视图，点 E 在 AB 上，在梯形 $DEBC$ 区域内部展示文物，DE 是玻璃幕墙，游客只能在△ ADE 区域内参观．在 AE 上点 P 处安装一可旋转的监控摄像头，$\angle MPN$ 为监控角，其中 M 、N 在线段 DE（含端点）上，且点 M 在点 N 的右下方．经测量得知：$AD=6$ 米，$AE=6$ 米，$AP=2$ 米，$\angle MPN=\dfrac{\pi}{4}$．记 $\angle EPM=\theta$（弧度），监控摄像头的可视区域△ PMN 的面积为 S 平方米.

（1）分别求线段 PM 、PN 关于 θ 的函数关系式，并写出 θ 的取值范围；

（2）求 S 的最小值.



20.（本题满分 16 分）本题共 3 小题，第（1）小题 4 分，第（2）小题 6 分，第（3）小题 6 分.

已知动点 M 到直线 $x+2=0$ 的距离比到点 $F(1,0)$ 的距离大 1.

（1）求动点 M 所在的曲线 C 的方程；

（2）已知点 $P(1,2)$，A、B 是曲线 C 上的两个动点，如果直线 PA 的斜率与直线 PB 的斜率互为相反数，证明直线 AB 的斜率为定值，并求出这个定值；

（3）已知点 $P(1,2)$，A、B 是曲线 C 上的两个动点，如果直线 PA 的斜率与直线 PB 的斜率之和为 2，证明：直线 AB 过定点.

21.（本题满分 18 分）本题共 3 小题，第（1）小题 4 分，第（2）小题 6 分，第（3）小题 8 分.

若无穷数列$\{a_n\}$和无穷数列$\{b_n\}$满足：存在正常数 A，使得对任意的$n \in \mathbf{N}^*$，均有$|a_n - b_n| \le A$，则称数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$具有关系$P(A)$.

（1）设无穷数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均是等差数列，且$a_n = 2n$，$b_n = n + 2\left(n \in \mathbf{N}^*\right)$，问：数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$是否具有关系$P(1)$？说明理由；

（2）设无穷数列$\{a_n\}$是首项为1，公比为$\dfrac{1}{3}$的等比数列，$b_n = a_{n+1} + 1$，$n \in \mathbf{N}^*$，证明：数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$具有关系$P(A)$，并求 A 的最小值；

（3）设无穷数列$\{a_n\}$是首项为1，公差为$d\left(d \in \mathrm{R}\right)$的等差数列，无穷数列$\{b_n\}$是首项为$2$，公比为$q\left(q \in \mathbf{N}^*\right)$的等比数列，试求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$具有关系$P(A)$的充要条件.

青浦区 2020 学年第一学期高三年级期终学业质量调研测试

数学参考答案　　　　2020.12

一.填空题（本大题满分 54 分）本大题共有 12 题，1-6 每题 4 分，7-12 每题 5 分考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果.

1．$\{2,4\}$；　2．$y=\log_2 x$；　3．-3；　4．2；

5．π；　6．4；　7．$\frac{201}{64}$；　8．$\sqrt{2}$；

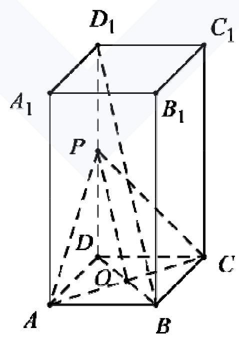
9. 21；　10. $\frac{13}{18}$；　11．284；　12. $[-1,8]$.

二.选择题（本大题满分 20 分）本大题共有 4 题，每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得 5 分，否则一律得零分.

13. B　；14. C　；15．D　；16. B　.

三．解答题（本大题满分 74 分）本大题共有 5 题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

17.(本题满分 14 分）本题共 2 小题，第（1）小题 6 分，第（2）小题 8 分.



（1）证明：设 AC 和 BD 交于点 O，则 O 为 BD 的中点，

连结 PO，又因为 P 是 DD_1 的中点，故 $PO//BD_1$

又因为 $PO\subset$ 平面 PAC，$BD_1\not\subset$ 平面 PAC

所以直线 $BD_1//$ 平面 PAC

（2）由（1）知，$PO//BD_1$，所以异面直线 BD_1 与 AP 所成的角就等于 PO 与 AP 所成的角，故 $\angle APO$ 即为所求；

因为 $PA=PC=\sqrt{2}$，$AO=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 且 $PO\perp AO$

所以 $\sin\angle APO=\frac{AO}{AP}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ \therefore\angle APO=30^\circ$

即异面直线 BD_1 与 AP 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$（30°）.

18．（本题满分 14 分）第（1）小题满分 6 分，第（2）小题满分 8 分.

解：（1）因为 $f(x)$ 为偶函数，且 $x\in\mathbf{R}$，所以 $f(-x)=f(x)$

即 $(-x)^2+|-x-a|=x^2+|x-a|$

即 $|-x-a|=|x-a|\Leftrightarrow|-x-a|^2=|x-a|^2$

所以$4ax=0$对一切$x\in\mathbf{R}$成立，所以$a=0$

（2）因为$a>0$，且$x\in(0,a]$

所以$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x^2+|x-a|}{x}=\dfrac{x^2+a-x}{x}=x+\dfrac{a}{x}-1$，

任取$0<x_1<x_2\le a$，$g(x_1)-g(x_2)=x_1+\dfrac{a}{x_1}-x_2-\dfrac{a}{x_2}$

$=(x_1-x_2)+\dfrac{a(x_2-x_1)}{x_1x_2}=(x_1-x_2)\dfrac{(x_1x_2-a)}{x_1x_2}$

因为$0<x_1<x_2\le a$，所以$x_1-x_2<0$且$0<x_1x_2<a^2$

又$g(x)$在区间$(0,a]$上为减函数，所以$x_1x_2-a<0$

即$a>x_1x_2$，所以$a\ge a^2$又$a>0$，所以$0<a\le 1$.

19.(本题满分 14 分）本题共 2 小题，第（1）小题 6 分，第（2）小题 8 分.

解：（1）在ΔPME中，$\angle EPM=\theta$，$PE=AE-AP=4$米，$\angle PEM=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle PME=\dfrac{3\pi}{4}-\theta$，

由正弦定理得$\dfrac{PM}{\sin\angle PEM}=\dfrac{PE}{\sin\angle PME}$，

所以$PM=\dfrac{PE\times\sin\angle PEM}{\sin\angle PME}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin(\frac{3\pi}{4}-\theta)}=\dfrac{4}{\sin\theta+\cos\theta}$，

同理在ΔPNE中，由正弦定理得$\dfrac{PN}{\sin\angle PEN}=\dfrac{PE}{\sin\angle PNE}$，

所以$PN=\dfrac{PE\times\sin\angle PEN}{\sin\angle PNE}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\cos\theta}$，

当M与E重合时，$\theta=0$；当N与D重合时，$\tan\angle APD=3$,即$\angle APD=\arctan 3$，

$\theta=\pi-\dfrac{\pi}{4}-arc\tan 3=\dfrac{3\pi}{4}-arc\tan 3$，所以$0\le\theta\le\dfrac{3\pi}{4}-arc\tan 3$；

（2）ΔPMN的面积$S=\dfrac{1}{2}PM\times PN\times\sin\angle MPN=\dfrac{4}{\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{4}{\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\theta}=\dfrac{8}{\sin 2\theta+\cos 2\theta+1}=\dfrac{8}{\sqrt{2}\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})+1}$，

因为$0\le\theta\le\dfrac{3\pi}{4}-arc\tan 3$，所以当$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$即$\theta=\dfrac{\pi}{8}\in\left[0,\dfrac{3\pi}{4}-atc\tan 3\right]$时，

S 取得最小值为 $\dfrac{8}{\sqrt{2}+1}=8(\sqrt{2}-1)$

所以可视区域 ΔPMN 面积的最小值为 $8(\sqrt{2}-1)$ 平方米.

20.(本题满分 16 分）本题共 3 小题，第（1）小题 4 分，第（2）小题 6 分，第（3）小题 6 分.

解：（1）已知动点 M 到直线 $x+2=0$ 的距离比到点 $F(1,0)$ 的距离大 1，等价于动点 M 到直线 $x=-1$ 的距离和到点 $F(1,0)$ 的距离相等，

由抛物线的定义可得曲线 C 的方程为 $y^2=4x$

（2）设直线 PA 的斜率为 k，因为直线 PA 的斜率与直线 PB 的斜率互为相反数，所以直线 PB 的斜率为 $-k$，

则 l_{PA}：$y-2=k(x-1)$，l_{PB}：$y-2=-k(x-1)$

$$\begin{cases} y-2=k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases} \Rightarrow ky^2-4y-4k+8=0 \text{ 或 } k^2x^2-\left(2k^2-4k+4\right)x+\left(2-k\right)^2=0$$

即 $\left[ky+\left(2k-4\right)\right]\left(y-2\right)=0$，所以可得 $A\left(\dfrac{\left(2-k\right)^2}{k^2},\dfrac{4-2k}{k}\right)$

同理得 $\begin{cases} y-2=-k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases} \Rightarrow ky^2+4y-4k-8=0$ 或 $k^2x^2-\left(2k^2+4k+4\right)x+\left(k+2\right)^2=0$

即 $\left[ky+\left(2k+4\right)\right]\left(y-2\right)=0$，所以可得 $B\left(\dfrac{\left(2+k\right)^2}{k^2},\dfrac{-4-2k}{k}\right)$

$$\therefore k_{AB}=\frac{\dfrac{-4-2k}{k}-\dfrac{4-2k}{k}}{\dfrac{\left(2+k\right)^2}{k^2}-\dfrac{\left(2-k\right)^2}{k^2}}=-1$$

即直线 AB 的斜率为定值 -1；

（3）设直线 PA 的斜率为 k，所以直线 PB 的斜率为 $2-k$，

则 l_{PA}：$y-2=k(x-1)$，l_{PB}：$y-2=-k(x-1)$

$$\begin{cases} y-2=k(x-1) \\ y^2=4x \end{cases} \Rightarrow ky^2-4y-4k+8=0$$

即 $\left[ky+\left(2k-4\right)\right]\left(y-2\right)=0$，所以可得 $A\left(\dfrac{\left(2-k\right)^2}{k^2},\dfrac{4-2k}{k}\right)$ 同理得

$$\begin{cases} y-2=\left(2-k\right)(x-1) \\ y^2=4x \end{cases} \Rightarrow \left(2-k\right)y^2-4y+4k=0$$

即$\left[(2-k)y-2k\right](y-2)=0$，所以可得$B\left(\frac{k^2}{(2-k)^2},\frac{2k}{2-k}\right)$

$$\therefore k_{AB}=\frac{\frac{2k}{2-k}-\frac{4-2k}{k}}{\frac{k^2}{(2-k)^2}-\frac{(2-k)^2}{k^2}}=\frac{k(k-2)}{k^2-2k+2}$$

$\therefore l_{AB}$：$y-\frac{2k}{2-k}=\frac{k(k-2)}{k^2-2k+2}\left(x-\frac{k^2}{(2-k)^2}\right)$，$y=\frac{k(k-2)}{k^2-2k+2}(x+1)$

所以直线AB恒过$(-1,0)$

21.(本题满分 18 分）本题共 3 小题，第（1）小题 4 分，第（2）小题 6 分，第（3）小题 8 分.

解：（1）因为$a_n=2n$，$b_n=n+2\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，

若数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$具有关系$P(1)$，则对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，均有$|a_n-b_n|\le 1$，即$|2n-(n+2)|\le 1$，亦即$|n-2|\le 1$，

但$n=4$时，$|n-2|=2>1$，

所以数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$不具有关系$P(1)$.

（2）证明：因为无穷数列$\{a_n\}$是首项为 1，公比为$\frac{1}{3}$的等比数列，所以$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，

因为$b_n=2_{n+1}+1$，所以$b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n+1$，

所以$|a_n-b_n|=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^n-1\right|=1-\frac{2}{3^n}<1$，所以数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$具有关系$P(A)$.

设A的最小值为A_0，$|a_n-b_n|\le A_0$，因为$|a_n-b_n|<1$，所以$A_0\le 1$.

若$0<A_0<1$，则当$n>\log_3\frac{2}{1-A_0}$时，$3^n>\frac{2}{1-A_0}$，

则$1-\frac{2}{3^n}>A_0$，这与“对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，均有$|a_n-b_n|\le A_0$”矛盾，

所有$A_0=1$，即A的最小值为 1.

（3）因为数列$\{a_n\}$是首项为 1，公差为$d\left(d\in\mathrm{R}\right)$为等差数列，

无穷数列$\{b_n\}$是首项为 2，公比为$q\left(q\in\mathrm{N}^*\right)$的等比数列，

所以$a_n=a_1+(n-1)d=dn+1-d$，$b_n=b_1q^{n-1}=\frac{2}{q}\cdot q^n$，

设$1-d=a$，$\dfrac{2}{q}=b>0$，则$a_n=dn+a$，$b_n=bq^n$，$n\in\mathrm{N}^*$.

数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$具有关系$P(A)$，即存在正常数A，

使得对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，均有$|a_n-b_n|\le A$.

（I）当$d=0$，$q=1$时，$|a_n-b_n|=|1-2|=1\le 1$，取$A=1$，

则$|a_n-b_n|\le A$，数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$具有关系$P(A)$；

（II）当$d=0$，$q\ge 2$时，假设数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$具有关系$P(A)$，

则存在正常数A，使得对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，均有$|a_n-b_n|\le A$.

因为$|b_n|-|a_n|\le|a_n-b_n|$，所以，对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，$|b_n|-|a_n|\le A$，

即$bq^n\le 1+A$，$q^n\le\dfrac{1+A}{b}$，所以$n\le\log_q\dfrac{1+A}{b}$，

这与“对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，均有$|b_n|-|a_n|\le A$”矛盾，不合；

（III）当$d\ne 0$，$q=1$时，假设数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$具有性质$P(A)$，

则存在正常数A，使得对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，均有$|a_n-b_n|\le A$.

因为$|a_n|-|b_n|\le|a_n-b_n|$，所以，对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，$|a_n|-|b_n|\le A$，

即$|a_n|\le 2+A$，$|dn+a|\le 2+A$，所以$|dn|-|a|\le 2+A$，$n\le\dfrac{|a|+2+A}{|d|}$，

这与“对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，均有$|a_n|-|b_n|\le A$”矛盾，不合；

（IV）当$d\ne 0$，$q\ge 2$时，假设数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$具有性质$P(A)$，

则存在正常数A，使得对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，均有$|a_n-b_n|\le A$.

因为$|b_n|-|a_n|\le|a_n-b_n|$，所以，对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，$|b_n|-|a_n|\le A$，

所以$bq^n\le|dn+a|+A\le|d|n+|a|+A$，所以$q^n\le\dfrac{|d|}{b}n+\dfrac{|a|+A}{b}$，

设$\dfrac{|d|}{b}=\lambda>0$，$\dfrac{|a|+A}{b}=\mu>0$，则对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，$q^n\le\lambda n+\mu$.

因为，$q^n\ge 2^n$，所以，对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，$2^n\le\lambda n+\mu$，

可以证明：存在$N>1$，当$n>N$时，$2^n>n^2$.（利用$f(n)=2^n-n^2$单调性）

又 $2^n \le \lambda n + \mu$，所以 $n^2 < \lambda n + \mu$，即 $n^2 - \lambda n - \mu < 0$，解得 $0 < n < \dfrac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\mu}}{2}$，

这与对任意的 $n \in \mathrm{N}^*$，$2^n \le \lambda n + \mu$ 矛盾，不合.

综上所述，数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 具有关系 $P(A)$ 的充要条件为 $d = 0$，$q = 1$.