松江区 2020 学年度第一学期期末质量监控试卷

高三数学

（满分 150 分，完卷时间 120 分钟）　　　　2020．12

考生注意：

1．本考试设试卷和答题纸两部分，试卷包括试题与答题要求，所有答题必须涂（选择题）或写（非选择题）在答题纸上，做在试卷上一律不得分。

2．答题前，务必在答题纸上填写学校、班级、姓名和考号。

3．答题纸与试卷在试题编号上是一一对应的，答题时应特别注意，不能错位。

一、填空题（本大题满分 54 分）本大题共有 12 题，第 1～6 题每个空格填对得 4 分，第 7～12 题每个空格填对得 5 分，否则一律得零分.

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{3^n+2^n}=$___▲___.

2．若集合 $A=\{x\,|-1<x<3\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则 $A\cap B=$___▲___.

3．已知复数 z 满足 $z\cdot(1-\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$（$\mathrm{i}$ 为虚数单位），则 $|z|=$___▲___.

4．若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos(\pi-2\alpha)=$___▲___.

5．抛物线 $y^2=-4x$ 的准线方程是___▲___.

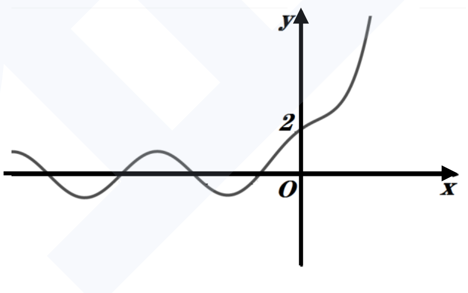
6．已知函数 $f(x)$ 图像与函数 $g(x)=2^x$ 的图像关于 $y=x$ 对称，则 $f(3)=$___▲___.

7．从包含学生甲的 1200 名学生中随机抽取一个容量为80 的样本，则学生甲被抽到的概率为___▲___.

8．在 $(x^2+\dfrac{2}{x})^6$ 的二项展开式中，常数项等于___▲___.

9．在 ΔABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，且 $\begin{vmatrix}\sqrt{3}b+2c & 2a\\ \cos B & 1\end{vmatrix}=0$，则角 $A=$___▲___.

10．从以下七个函数: $y=x$, $y=\dfrac{1}{x}$, $y=x^2$, $y=2^x$, $y=\log_2 x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$ 中选取两个函数记为 $f(x)$ 和 $g(x)$，构成函数 $F(x)=f(x)+g(x)$，若 $F(x)$ 的图像如图所示，则 $F(x)=$___▲___.



11．已知向量 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$，且 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，则 $x+y$ 的最大值为___▲___.

12．对于定义域为D的函数$f(x)$，若存在$x_1,x_2\in D$且$x_1\neq x_2$，使得$f(x_1^2)=f(x_2^2)=2f(x_1+x_2)$，称函数$f(x)$具有性质$M$．若函数$g(x)=\left|\log_2 x-1\right|\quad x\in(0,a]$具有性质$M$，则实数$a$的最小值为_▲___.

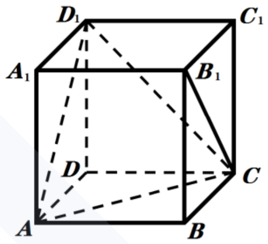
二、选择题

13．已知两条直线l_1、l_2的方程分别为$l_1:ax+y-1=0$和$l_2:x-2y+1=0$，则“$a=2$”是“直线$l_1\perp l_2$”的（　　）

（A）充分不必要条件　　（B）必要不充分条件
（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

14．在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，下列四个结论中错误的是（　　）

（A）直线B_1C与直线AC所成的角为$60°$
（B）直线B_1C与平面AD_1C所成的角为$60°$
（C）直线B_1C与直线AD_1所成的角为$90°$
（D）直线B_1C与直线AB所成的角为$90°$



15．设$x>0,y>0$，若$2x+\dfrac{1}{y}=1$，则$\dfrac{y}{x}$的（　　）

（A）最小值为8　　（B）最大值为8
（C）最小值为2　　（D）最大值为2

16．记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知点(n,a_n) 在直线$y=10-2x$上，若有且只有两个正整数n满足$S_n\geq k$，则实数k的取值范围是(　　)

（A）$(8,14]$　　（B）$(14,18]$
（C）$(18,20]$　　（D）$(18,\frac{81}{4}]$

三、解答题（本大题满分76分）本大题共有5题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

17．**（本题满分14分）本题共有2个小题，第1小题满分7分，第2小题满分7分**

如图1，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，已知$AB\perp AC$，$AB=AC=1$，$AA_1=2$，且$AA_1\perp$平面ABC．过A_1、C_1、B三点作平面截此三棱柱，截得一个三棱锥和一个四棱锥（如图2）.

（1）求异面直线BC_1与AA_1所成角的大小（结果用反三角函数表示）；

（2）求四棱锥$B-ACC_1A_1$的体积和表面积.

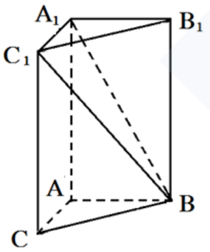


图1

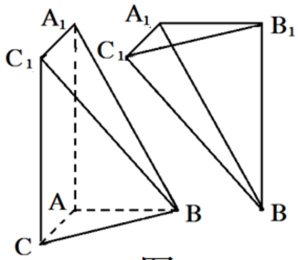


图2

18．**（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 7 分，第 2 小题满分 7 分**

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x+1$.

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期和值域；

（2）若对任意的 $x\in R$， $f^2(x)-k\cdot f(x)-2\le 0$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

19．**（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 7 分，第 2 小题满分 7 分**

某网店有 3(万件)商品，计划在元旦旺季售出商品 x (万件). 经市场调查测算，花费 t (万元)进行促销后，商品的剩余量 $3-x$ 与促销费 t 之间的关系为 $3-x=\dfrac{k}{t+1}$（其中 k 为常数），如果不搞促销活动，只能售出 1(万件)商品.

（1）要使促销后商品的剩余量不大于 0.1 (万件), 促销费 t 至少为多少 (万元)?

（2）已知商品的进价为 32(元/件), 另有固定成本 3(万元). 定义每件售出商品的平均成本为 $32+\dfrac{3}{x}$（元）. 若将商品售价定为：“每件售出商品平均成本的 1.5 倍”与“每件售出商品平均促销费的一半”之和，则当促销费 t 为多少(万元)时，该网店售出商品的总利润最大？此时商品的剩余量为多少?

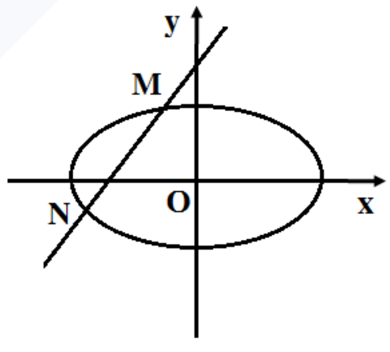
20．**（本题满分 16 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 6 分**

已知椭圆 Γ: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右焦点坐标为 $(2,0)$，且长轴长为短轴长的 $\sqrt{2}$ 倍. 直线 l 交椭圆 Γ 于不同的两点 M 和 N .

（1）求椭圆 Γ 的方程；

（2）若直线 l 经过点 $T(0,4)$，且 ΔOMN 的面积为 $2\sqrt{2}$，求直线 l 的方程；

（3）若直线 l 的方程为 $y=kx+t(k\ne 0)$， 点 M 关于 x 轴的对称点为 M'，直线 MN 、 $M'N$ 分别与 x 轴相交于 P 、 Q 两点，求证：$|OP|\cdot|OQ|$ 为定值.



21.（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8

对于由 m 个正整数构成的有限集 $M=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$，记 $P(M)=a_1+a_2+\cdots+a_m$，特别规定 $P(\varnothing)=0$．若集合 M 满足：对任意的正整数 $k\le P(M)$，都存在集合 M 的两个子集 A、B，使得 $k=P(A)-P(B)$ 成立，则称集合 M 为“满集”.

（1）分别判断集合 $M_1=\{1,2\}$ 与 $M_2=\{1,4\}$ 是否是“满集”，请说明理由；

（2）若 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 由小到大能排列成公差为 $d(d\in N^*)$ 的等差数列，求证：集合 M 为“满集”的必要条件是 $a_1=1$，$d=1$ 或 2；

（3）若 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 由小到大能排列成首项为 1，公比为 2 的等比数列，求证：集合 M 是“满集”.

2020.12 松江区高三数学一模试卷参考答案

一、填空题

1. $\underline{1}$；2. $\underline{\{1,2\}}$；3. $\underline{1}$；4. $\underline{-\dfrac{7}{9}}$；5. $\underline{x=1}$；6. $\underline{\log_2 3}$；

7. $\underline{\dfrac{1}{15}}$；8. $\underline{240}$；9. $\underline{\dfrac{5\pi}{6}}$；10. $\underline{2^x+\cos x}$；11. $\underline{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$；12. $\underline{2\sqrt{2}+2}$

二、选择题

13. C　14. B　15. A　16. C

17.如图 1，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知 $AB\perp AC$，$AB=AC=1$，$AA_1=2$，且 $AA_1\perp$ 平面 ABC. 过 A_1、C_1、B 三点作平面截此三棱柱，截得一个三棱锥和一个四棱锥（如图 2）.

（1）求异面直线 BC_1 与 AA_1 所成角的大小（结果用反三角函数表示）.

（2）求四棱锥 $B-ACC_1A_1$ 的体积和表面积.

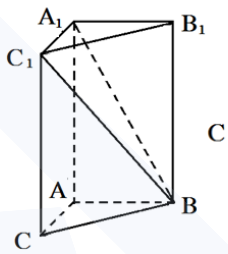


图 1

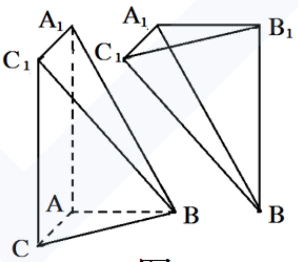


图 2

解:（1）$\because AA_1//CC_1$　$\therefore \angle BC_1C$ 即为异面直线 BC_1 与 AA_1 所成的角，………2 分

$\because AA_1\perp$ 平面 ABC，$\therefore CC_1\perp$ 平面 ABC，

$\therefore\ \angle C_1CB=90^\circ$，

$\because CB=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\ CC_1=2$　………5 分

$\therefore\ \tan\angle C_1CB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$\therefore\ \angle C_1CB=arc\tan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

即异面直线 BC_1 与 AA_1 所成的角为 $arc\tan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　………7 分

(或 $\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，或 $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$)

（2）$V_{B-ACC_1A_1}=\dfrac{1}{3}\cdot1\cdot2=\dfrac{2}{3}$　……………10 分

$S_{全}=S_{\Delta BAC}+S_{\Delta BAA_1}+S_{\Delta BA_1C_1}+S_{\Delta BC_1C}+S_{CAA_1C_1}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1+\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2+\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot2+1\cdot2=\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}+2$

$=\dfrac{7}{2}+\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　……………14 分

18.已知 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x+1$

（1）求 $f(x)$ 的最小正周期和值域;

（2）若对任意的 $x\in R$，$f^2(x)-k\cdot f(x)-2\le0$ 恒成立，求 k 的取值范围.

解:（1）$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x+1$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{\cos 2x+1}{2}+1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{3}{2}$ ………3 分

$\therefore f(x)$ 的为最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$， ………5 分

值域为 $f(x)\in[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$ ……………7 分

（2）记 $f(x)=t$ ，则 $t\in[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$ ，…………………8 分

由 $f^2(x)-k\cdot f(x)-2\le 0$ 恒成立，知 $t^2-kt-2\le 0$ 恒成立， 即 $kt\ge t^2-2$ 恒成立，

$\because t>0 \quad \therefore \quad k\ge\frac{t^2-2}{t}=t-\frac{2}{t}$ ……………11 分

$\because \quad g(t)=t-\frac{2}{t}$ 在 $t\in[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$ 时单调递增

$g_{\max}(t)=g(\frac{5}{2})=\frac{5}{2}-\frac{4}{5}=\frac{17}{10}$ $\therefore k$ 的取值范围是 $k\ge\frac{17}{10}$ ……………14 分

19. 某网店有 3(万件)商品，计划在元旦旺季售出商品 x(万件). 经市场调查测算，花费 t(万元)进行促销后，商品的剩余量 $3-x$ 与促销费 t 之间的关系为 $3-x=\frac{k}{t+1}$（其中 k 为常数），如果不搞促销活动，只能售出 1(万件)商品.

（1）要使促销后商品的剩余量不大于 0.1(万件), 促销费 t 至少为多少 (万元)?

（2）已知商品的进价为 32(元/件), 另有固定成本 3(万元). 定义每件售出商品的平均成本为 $32+\frac{3}{x}$（元）. 若将商品售价定为: “每件售出商品平均成本的1.5倍”与“每件售出商品平均促销费的一半”之和，则当促销费 t 为多少(万元)时，该网店售出商品的总利润最大？此时商品的剩余量为多少?

解:（1）由 $3-x=\frac{k}{t+1}$，当 $t=0$ 时， $x=1$，得 $k=2$ $\therefore$ $3-x=\frac{2}{t+1}$ ……………4 分

由 $\frac{2}{t+1}\le 0.1$ 解得 $t\ge 19$ ……………7 分

（2）网店的利润 y (万元)，由题意可得:

$y=x(\frac{3+32x}{x}\cdot 1.5+\frac{t}{2x})-(3+32x+t)$ ……………10 分

$=\frac{99}{2}-\frac{32}{t+1}-\frac{t}{2}=50-(\frac{32}{t+1}+\frac{t+1}{2})\le 50-2\sqrt{\frac{32}{t+1}\cdot\frac{t+1}{2}}=42$ ……………12 分

当且仅当 $\frac{32}{t+1}=\frac{t+1}{2}$，即 $t=7$ 时取等号，此时 $3-x=0.25$；

所以当促销费为 7 万元时，网店利润的最大为 42 万元，此时商品的剩余量为 0.25(万件). ……………14 分

20. 已知椭圆 Γ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ （$a>b>0$）的右焦点的坐标为 $(2,0)$，且长轴长为短轴长的 $\sqrt{2}$ 倍. 直线 l 交椭圆 Γ 于不同的两点 M 和 N .

（1）求椭圆 Γ 的方程;

（2）若直线 l 经过点 $T(0,4)$，且 ΔOMN 的面积为 $2\sqrt{2}$，求直线 l 的方程;

（3）若直线l的方程为$y=kx+t(k\neq 0)$， 点M关于x轴的对称点为M'，直线MN、$M'N$ 分别与x轴交于P、Q两点，求证：$|OP|\cdot|OQ|$ 为定值.

解：（1）由题意得 $a=\sqrt{2}b$，$a^2-b^2=4$， ……… ……2 分

解得 $a=2\sqrt{2}$，$b=2$， 所以椭圆Γ的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. …………4 分

（2）设点M、N的坐标为$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$，直线l的方程为$y=kx+4$. …5 分

由方程组 $\begin{cases} y=kx+4 \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2+16kx+24=0$

所以$x_1+x_2=-\dfrac{16k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{24}{1+2k^2}$ ………7 分

$$S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot|x_1-x_2|=2\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{8\sqrt{2}\sqrt{2k^2-3}}{1+2k^2}=2\sqrt{2}$$

解得$k=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ $\therefore$直线l的方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}x+4$ …………10 分

（3）由题意知M'点的坐标为 $M'(x_1,-y_1)$ …………11 分

将$y=kx+t$，代入$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$

得：$(2k^2+1)x^2+4ktx+2t^2-8=0$，

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{4kt}{2k^2+1}, x_1x_2=\dfrac{2t^2-8}{2k^2+1}$

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2t=\dfrac{t}{2k^2+1}$ …………13 分

对于直线$y=kx+t$， 令$y=0$ 得$x=-\dfrac{t}{k}$ $\therefore$ $|OP|=\left|-\dfrac{t}{k}\right|$ …………14 分

对于直线 $M'N$：$y-y_2=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$， 令$y=0$

得$x=\dfrac{-y_2(x_2-x_1)}{y_2+y_1}+x_2=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_2+y_1}=\dfrac{x_1(kx_2+t)+x_2(kx_1+t)}{y_2+y_1}$

$=\dfrac{2kx_1x_2+t(x_1+x_2)}{y_2+y_1}=-\dfrac{8k}{t}$，$\therefore |OQ|=\left|-\dfrac{8k}{t}\right|$

$|OP|\cdot|OQ|=\left|-\dfrac{t}{k}\right|\cdot\left|-\dfrac{8k}{t}\right|=8$ …………16 分

21.对于由m $(m\geq 2)$个正整数构成的有限集$M=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$，记$P(M)=a_1+a_2+\cdots+a_m$.若集合$M$满足：对任意的正整数$k\leq P(M)$，都存在集合$M$的两个子集$A,B$，使得$k=P(A)-P(B)$成立，称集合$M$为“满集”.特别规定$P(\varnothing)=0$.

（1）分别判断集合$M_1=\{1,2\}$与$M_2=\{1,4\}$是否是“满集”，请说明理由；

（2）若$a_1,a_2,\cdots,a_m$由小到大能排列成公差为$d(d\in N^*)$的等差数列，求证：集合M为“满集”的必要条件是$a_1=1$，$d=1$或2；

（3）若$a_1,a_2,\cdots,a_m$由小到大能排列成首项为1，公比为2的等比数列，求证：集合M是“满集”；.

[解答]:（1）集合M_1是“满集”，集合M_2不是“满集”. …………2 分

对于集合 M_1， $P(M_1)=1+2=3$，且 M_1 共有 4 个子集：$\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}$

当 k 分别取 $1,2,3$ 时，由 $1=P(\{1\})-P(\varnothing);2=P(\{2\})-P(\varnothing);3=P(\{1,2\})-P(\varnothing);$

故 M_1 是“满集”； ……………3 分

对于集合 M_2， $P(M_1)=1+4=5$，且 M_1 共有 4 个子集：$\varnothing,\{1\},\{4\},\{1,4\}$

当 $k=2$ 时，不存在 $\{1,4\}$ 的两个子集 A,B，使得 $P(A)-P(B)=2$，

故 M_2 不是“满集” ……………4 分

（2）$\because a_1,a_2,\cdots,a_m$ 由小到大能排列成公差为 $d(d\in N^*)$ 的等差数列，

$\therefore a_1<a_2<\cdots<a_m$，记 $k_0=P(M)=a_1+a_2+\cdots+a_m$ ……………5 分

$\because M$ 为“满集”，

$\therefore$ 对任意的正整数 $k\le k_0$，都存在集合 M 的两个子集 A,B，使得 $k=P(A)-P(B)$ 成立，

当 $k=k_0-1$ 时，由 $k_0-1=P(A)-P(B)$，及 $P(B)\ge 0$ 知 $P(A)=k_0$ 或 $P(A)=k_0-1$，

若 $P(A)=k_0$，则 $P(B)=1$，

$\therefore$ $a_1=1$，此时 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}$， $B=\{a_1\}$ ……7 分

若 $P(A)=k_0-1$，则 $A\subset M$，在 M 的真子集中， $P(A)=a_2+a_3+\cdots+a_m$ 最大，必有 $a_1=1$，

此时 $A=\{a_2,a_3,\cdots,a_m\}$， $B=\varnothing$.

综上可得：$\therefore a_1=1$ ………………8 分

若 $d\ge 3$，当 $k=k_0-3$ 时，$\because (k_0-0)>(k_0-1)>((k_0-1)-1)>k>(k_0-(1+d))>\cdots$，

$\therefore$ 不存在 M 的子集 A,B，使得 $k=k_0-3=P(A)-P(B)$，$\therefore d=1,2$，

综合得：集合 M 为“满集”的必要条件是， $d=1$ 或 2 ………………10 分

（3）由已知： $P=\{1,2,4,\cdots,2^{m-1}\},P(M)=1+2+4+\cdots+2^{m-1}=2^m-1$ …………11 分

对任意 $k\le 2^m-1$，$\because k\in N^*$，$\therefore$ 存在 $k_1<k,k_1\in N^*$ 和 $p_1\in\{0,1\}$，使得 $k=2k_1+p_1$，

同理有 $k_1=2k_2+p_2$， $k_2=2k_3+p_3\cdots$ ，其中 $k_i<k_{i-1},k_i\in N^*,p_i\in\{0,1\}$，经过有限次的操作后，必存在 $k_s=1\quad(0\le s<m)$，

$\therefore k=2k_1+p_1=2(2k_2+p_2)+p_1=\cdots=2^s+2^{s-1}p_s+2^{s-2}p_{s-1}+\cdots+2p_2+2^0p_1$ …………14 分

当 $p_{j_1}=p_{j_2}=\cdots=p_{j_n}=1$ 时， $k=2^s+2^{j_1}+2^{j_2}+\cdots+2^{j_n}$ …………16 分

此时取 $A=\{2^s,2^{j_1},\cdots,2^{j_n}\},B=\varnothing$ ，

则有 $P(A)-P(B)=(2^s+2^{j_1}+2^{j_2}+\cdots+2^{j_n})-0=k$.

$\therefore$ 集合 M 是“满集”. …………18 分