2021 届徐汇区高考数学一模

一. 填空题（本大题共 12 题，1-6 每题 4 分，7-12 每题 5 分，共 54 分）

1. 计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n}{2n^2-5n+3}=$________

2. 已知 $\vec{a}=(m-2,-3)$，$\vec{b}=(-1,m)$，若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 $m=$________

3. 不等式 $\begin{vmatrix}1 & -x\\ 3 & -2\end{vmatrix}>0$ 的解集为________

4. 在 $(x-1)^6$ 的二项展开式中，中间项的系数是________

5. 设集合 $A=\{(x,y)\mid y=4^x,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=6\cdot 2^x-8,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$________

6. 函数 $y=\arccos x$，$x\in[-1,0]$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$________

7. 用数学归纳法证明：$1+2+2^2+\cdots+2^{5n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 能被 31 整除时，从 k 到 $k+1$ 添加的项共有________项（填多少项即可）

8. 如图，圆锥的侧面展开图恰好是一个半圆，则该圆锥的母线与底面所成角的大小为________

9. 小王同学有 4 本不同的数学书，3 本不同的物理书和 3 本不同的化学书，从中任取 2 本，则这 2 本书属于不同学科的概率是________（结果用分数表示）

10. 在△ABC 中，$\angle A=45^\circ$，M 是 AB 的中点，若 $|AB|=|BC|=2$，D 在线段 AC 上运动，则 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DM}$ 的最小值是________

11. 已知函数 $f(x)=ax+b$（其中 a、$b\in\mathbf{R}$）满足：对任意的 $x\in[0,1]$，有 $|f(x)|\le 1$，则 $(2a+1)(2b+1)$ 的最小值是________

12. 已知双曲线 $\Gamma:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的左右焦点分别是 F_1、F_2，直线 l 与 Γ 的左、右支分别交于 P、Q（P、Q 均在 x 轴上方），若直线 PF_1、QF_2 的斜率均为 k，且四边形 PQF_2F_1 的面积为 $20\sqrt{6}$，则 $k=$________

二. 选择题（本大题共 4 题，每题 5 分，共 20 分）

13. 已知 $x\in\mathbf{R}$，条件 $p:x^2<x$，条件 $q:\dfrac{1}{x}>1$，则 p 是 q 的（　　）

A. 充分非必要条件　　*B.* 必要非充分条件

C. 充要条件　　*D.* 既非充分也非必要条件

14. 若 $2-\mathrm{i}$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2+ax+b=0$ 的一根，则 $a+b=$（　　）

A. 1　　*B.* -1　　*C.* 9　　*D.* -9

15. 方程 $\cos x=\log_8 x$ 的实数解的个数是（　　）

A. 4　　*B.* 3　　*C.* 2　　*D.* 1

16. 设 T 是平面直角坐标系 xOy 上以 $A(0,2)$、$B(-\sqrt{3},-1)$、$C(\sqrt{3},-1)$ 为顶点的正三角形，考虑一下五种平面上的变换：① 绕原点作 120° 的逆时针旋转；② 绕原点作 240° 的逆时针旋转；③ 关于直线 OA 对称；④ 关于直线 OB 对称；⑤ 关于直线 OC 对称. 任选三种变换（可以相同）共 125 种变换方式，若要使得 T 变回起始的位置（即点 A、B、C 分别都在原来的位置），共有（　　）种变换方式

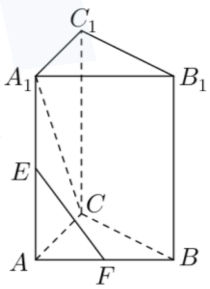
A. 12　　*B.* 16　　*C.* 20　　*D.* 24

三. 解答题（本大题共 5 题，共 14+14+14+16+18=76 分）

17. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC=2$，$CC_1=4$，$\angle ACB=90^\circ$，E、F 分别为棱 AA_1、AB 的中点.

（1）求异面直线 A_1C 与 EF 所成的角的大小（结果用反三角函数值表示）；

（2）求五棱锥 $C-EFBB_1A_1$ 的体积 $V_{C-EFBB_1A_1}$.



18. 设椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2+1}+\dfrac{y^2}{m^2}=1$（$m>0$）的两个焦点分别为是 F_1、F_2，M 是椭圆上任意一点，$\triangle F_1MF_2$ 的周长为 $2+2\sqrt{2}$.

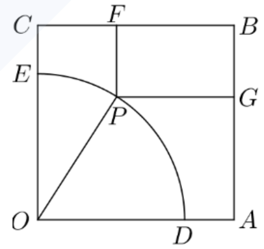
（1）求椭圆的方程；

（2）过椭圆在 y 轴负半轴上的顶点 B 及椭圆右焦点 F_2 作一直线交椭圆于另一点 N，求 $\angle F_1NB$ 的大小（结果用反三角函数值表示）.

19. 进博会期间，有一个边长 80 m 的正方形展厅 $OABC$，由于疫情，展厅被分割成如图所示的相互封几个部分，已划出以 O 为圆心，60 m 为半径的扇形 ODE 作为展厅，现要在余下的地块中划出一个矩形的样品说明会场地 $PGBF$，矩形有两条边分别落在 AB 和 BC 上，设 $\angle POA=\alpha$（$\frac{\pi}{12}\le\alpha\le\frac{5\pi}{12}$）.

（1）用 α 表示矩形 $PGBF$ 的面积，并求出当矩形 $PGBF$ 为正方形时的面积（精确到 1 m^2）；

（2）当 α 为何值时，矩形 $PGBF$ 的面积 S_{PGBF} 最大？并求出最大面积（精确到 1 m^2）.



20. 设 $\mu(x)$ 表示不小于 x 的最小整数，例如：$\mu(0.3)=1$，$\mu(-2.5)=-2$.

（1）解方程：$\mu(x-1)=3$；

（2）设 $f(x)=\mu(x\cdot\mu(x))$，$n\in\mathbf{N}^*$，试分别求出 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$、$(1,2]$ 以及 $(2,3]$ 上的值域，若 $f(x)$ 在区间 $(0,n]$ 上的值域为 M_n，求集合 M_n 中的元素的个数；

（3）设实数 $a>0$，$g(x)=x+a\cdot\frac{\mu(x)}{x}-2$，$h(x)=\frac{\sin\pi x+2}{x^2-5x+7}$，若对于任意 $x_1,x_2\in(2,4]$ 都有 $g(x_1)>h(x_2)$，求实数 a 的取值范围.

21. 对于项数为m（$m\geq 3$，$m\in \mathbf{N}$）的有限数列$\{a_n\}$，记该数列前i项a_1，a_2，$\cdots$，a_i中的最大项 为ai（$i=1,2,\cdots,m$），记$x_i=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}$，该数列后$m-i$项$a_{i+1}$，$a_{i+2}$，$\cdots$，$a_m$中的最小项$y_i$（$i=1,2,\cdots,m-1$），记$y_i=\min\{a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_m\}$，$d_i=x_i-y_i$（$i=1,2,3,\cdots,m-1$）.

（1）对于共有四项的数列：3，4，7，1，求出相应的d_1、d_2、d_3；

（2）设c为常数，且$a_k+x_{m-k+1}=c$（$k=1,2,3,\cdots,m$），求证：$x_k=a_k$（$k=1,2,3,\cdots,m$）；

（3）设实数$\lambda>0$，数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n=\lambda a_{n-1}+\dfrac{2}{3}$（$n=2,3,\cdots,m$），若数列$\{a_n\}$对应的$d_1$满足$d_{i+1}>d_i$对任意的正整数$i=1,2,3,\cdots,m-2$恒成立，求实数$\lambda$的取值范围.

参考答案

一. 填空题

1. $\frac{1}{2}$　　2. -1或3　　3. $\{x\,|\,x>\frac{2}{3}\}$　　4. -20

5. $\{(1,4),(2,16)\}$　　6. $\cos x$，$x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$　　7. 5　　8. $\frac{\pi}{3}$

9. $\frac{11}{15}$　　10. $[\frac{7}{8},4]$　　11. -9　　12. $\pm\sqrt{2}$

二. 选择题

13. C　　14. A　　15. B　　16. C

三. 解答题

17.（1）$\arccos\frac{\sqrt{30}}{6}$；（2）$\frac{14}{3}$.

18.（1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；（2）$\arccos\frac{4}{5}$.

19.（1）$S_{PGBF}=(80-60\sin\alpha)(80-60\cos\alpha)$，当矩形$PGBF$为正方形时的面积为$1412\,m^2$；（2）当$\alpha=\frac{\pi}{12}$时，$S_{PGBF}$有最大值$1421\,m^2$.

20.（1）$x\in(3,4]$；（2）当$x\in(0,1]$时，值域为$\{1\}$；当$x\in(1,2]$时，值域为$\{3,4\}$；当$x\in(2,3]$时，值域为$\{7,8,9\}$；集合M_n中的元素的个数为$\frac{n(1+n)}{2}$个；（3）$a>3$.

21.（1）$d_1=2$，$d_2=3$，$d_3=6$；（2）证明略；（3）$\lambda\in(\frac{1}{3},1)$.