2020 学年第一学期高三数学教学质量检测试卷

考生注意：

1．答题前，务必在答题纸上将姓名、学校、班级等信息填写清楚，并贴好条形码.

2．解答试卷必须在答题纸规定的相应位置书写，超出答题纸规定位置或写在试卷、草稿纸上的答案一律不予评分.

3．本试卷共有 21 道试题，满分 150 分，考试时间 120 分钟.

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1～6 题每题 4 分，第 7～12 题每题 5 分）考生应在答题纸的相应位置直接填写结果.

1. 不等式 $\dfrac{x-2}{x+1}<0$ 的解集为__________.

2. 函数 $y=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$ 的最小正周期为_________.

3. 计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+1}{3^n-1}=$__________.

4. 数组 2.7、3.1、2.5、4.8、2.9、3.6 的中位数为________.

5. 在 $(x+\dfrac{1}{x})^6$ 的二项展开式中，x^2 项的系数为__________.

6. 若函数 $y=f\left(x\right)$ 的反函数 $f^{-1}\left(x\right)=\log_a x\left(a>0,a\neq1\right)$ 图像经过点 $(8,\dfrac{3}{2})$，则 $f(-\dfrac{1}{2})$ 的值为_______.

7. 若直线 $\begin{vmatrix} x-1 & y+2 \\ 1 & k \end{vmatrix}=0$ 的法向量与直线 $x+y-1=0$ 的方向向量垂直，则实数 $k=$_____.

8. 设集合 $M=\left\{x\middle|x^2\leq1\right\}$，$N=\left\{b\right\}$，若 $M\cup N=M$，则实数 b 的取值范围为_______.

9. 设 F 为双曲线 $\Gamma:x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(b>0\right)$ 的右焦点，O 为坐标原点，P、Q 是以 OF 为直径的圆与双曲线 Γ 渐近线的两个交点．若 $\left|PQ\right|=\left|OF\right|$，则 $b=$_______.

10. 在 ΔABC 中，$AB=3$，$AC=2$，点 D 在边 BC 上．若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{3}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的值为______.

11. 设 O 为坐标原点，从集合 $\left\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\right\}$ 中任取两个不同的元素 x、y，组成 A、B 两点的坐标 $\left(x,y\right)$、$\left(y,x\right)$，则 $\angle AOB=2\arctan\dfrac{1}{3}$ 的概率为________.

12. 设公差不为 0 的等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n．若数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足：存在三个不同的正整数 r,s,t，使得 a_r,a_s,a_t 成等比数列，a_{2r},a_{2s},a_{2t} 也成等比数列，则 $\dfrac{990S_1+S_n}{a_n}$ 的最小值为________.

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 20 分，每题 5 分）每题有且只有一个正确选项．考生应在答题纸的相应位置，

将代表正确选项的小方格涂黑.

13. 设复数 $z=a+b\mathrm{i}$（其中 a、$b\in\mathbf{R}$，i 为虚数单位），则“$a=0$”是“z 为纯虚数”的（　）.

A. 充分非必要条件；　　　　*B.* 必要非充分条件 ；

C. 充要条件；　　　　D. 既非充分又非必要条件.

14. 对任意向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，下列关系式中不恒成立的是（　）.

A. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2$；　　　　*B.* $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2$；

C. $\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$；　　　　D. $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\le\left|\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|\right|$.

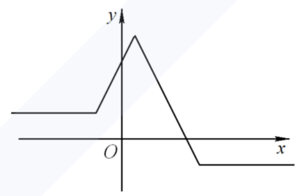
15. 设 m、n 为两条直线，α、β 为两个平面，则下列命题中假命题是（　）.

A. 若 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$；　*B.* 若 $m//n$，$m\perp\alpha$，$n//\beta$，则 $\alpha\perp\beta$；

C. $m\perp n$，$m//\alpha$，$n//\beta$，则 $\alpha//\beta$；　D. 若 $m//n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则 $\alpha//\beta$.

16. 设 $f\left(x\right)=\left|x-b_1\right|+\left|kx-b_2\right|-\left|2x-b_3\right|$，其中常数 $k>0$，$b_1,b_2,b_3\in\mathbf{R}$.若函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像如图所示，则数组 $\left(b_1,b_2,b_3\right)$ 的一组值可以是（　）.

A. $\left(3,-1,1\right)$；　　*B.* $\left(1,-2,-1\right)$；　　*C.* $\left(-1,2,2\right)$；　　*D.* $\left(1,-3,1\right)$.



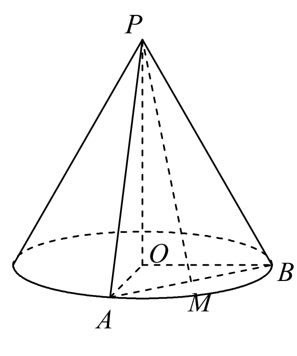
三、解答题（本大题共有 5 题，满分 76 分）解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17.（本题满分 **14** 分，第 **1** 小题满分 **6** 分，第 **2** 小题满分 **8** 分）

如图，已知圆锥的顶点为 P，底面圆心为 O，高为 $2\sqrt{3}$，底面半径为 2 .

（1）求该圆锥的侧面积；

（2）设 OA、OB 为该圆锥的底面半径，且 $\angle AOB=90^\circ$，M 为线段 AB 的中点，求直线 PM 与直线 OB 所成的角的正切值.



18.（本题满分 **14** 分，第 **1** 小题满分 **7** 分，第 **2** 小题满分 **7** 分）

设抛物线$\Gamma: y^2=4x$的焦点为F，直线$l: x-my-n=0$经过F且与Γ交于A、B两点.

（1）若$|AB|=8$，求m的值；

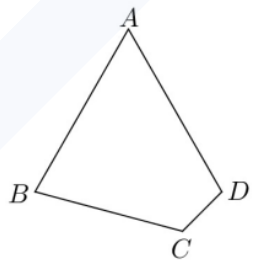
（2）设O为坐标原点，直线AO与Γ的准线交于点C，求证：直线BC平行于x轴.

19．（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）

某公共场所计划用固定高度的板材将一块如图所示的四边形区域$ABCD$沿边界围成一个封闭的留观区. 经测量，边界AB与AD的长度都是 20 米，$\angle BAD=60°$，$\angle BCD=120°$.

（1）若$\angle ADC=105°$，求BC的长（结果精确到米）；

（2）求围成该区域至多需要多少米长度的板材（不计损耗，结果精确到米）.



20．（本题满分 16 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 6 分）

设 $f(x)=x^3+ax^2-2x(x\in\mathbf{R})$，其中常数 $a\in\mathbf{R}$.

（1）判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

（2）若不等式 $f(x)>\frac{3}{2}x^3$ 在区间 $[\frac{1}{2},1]$ 上有解，求实数 a 的取值范围；

（3）已知：若对函数 $y=h(x)$ 定义域内的任意 x，都有 $h(x)+h(2m-x)=2n$，则函数 $y=h(x)$ 的图像有对称中心 (m,n).利用以上结论探究：对于任意的实数 a，函数 $y=f(x)$ 是否都有对称中心？若是，求出对称中心的坐标(用 a 表示)；若不是，证明你的结论.

21．（本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分）

若对于数列 $\{a_n\}$ 中的任意两项 a_i、a_j $(i>j)$，在 $\{a_n\}$ 中都存在一项 a_m，使得 $a_m=\frac{a_i^2}{a_j}$，则称数列 $\{a_n\}$ 为“X 数列”；若对于数列 $\{a_n\}$ 中的任意一项 $a_n(n\geq 3)$，在 $\{a_n\}$ 中都存在两项 a_k、$a_l(k>l)$，使得 $a_n=\frac{a_k^2}{a_l}$，则称数列 $\{a_n\}$ 为“Y 数列”.

（1）若数列 $\{a_n\}$ 为首项为1公差也为1的等差数列，判断数列 $\{a_n\}$ 是否为“X 数列”，并说明理由；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，求证：数列 $\{a_n\}$ 为“Y 数列”；

（3）若数列 $\{a_n\}$ 为各项均为正数的递增数列，且既为“X 数列”，又为“Y 数列”，求证：a_1，a_2，a_3，a_4 成等比数列.

2020 学年第一学期高三数学质量检测试卷

参考答案与评分标准

一．填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1—6 题每题 4 分，第 7---12 题每题 5 分）考生应在答题纸的相应位置直接填写结果．

1. $(-1,2)$　**2.** π　**3.** 0　**4.** 3.0

5. 15　**6.** $\frac{1}{2}$　**7.** -1　**8.** $[-1,1]$

9. 1　**10.** -3　**11.** $\frac{1}{9}$　**12.** 45

二．选择题(本大题共有 4 题，满分 20 分，每题 5 分)每题有且只有一个正确选项．考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑．

13. B　14. D　15. C　16. A

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 76 分）　解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必须的步骤．

17. **（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）**

解：（1）$OP\perp$ 底面 OAB

由题意高 $h=2\sqrt{3}$，底面半径 $r=2$，

所以母线 $l=4$ ………………2 分

圆锥的侧面积 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times 2\pi\times 2\times 4=8\pi$ ………………6 分

（2）取 OA 的中点为 N，因为 M 为 AB 的中点

所以 $MN//OB$，$\angle PMN$ 就是直线 PM 与直线 OB 所成的角 ………………2 分

因为 $OB\perp OA$，$OB\perp OP$，

所以 $OB\perp$ 平面 POA，$MN\perp$ 平面 POA，$MN\perp PN$ ………………4 分

在 Rt$\triangle PNM$ 中，$PN=\sqrt{h^2+(\frac{r}{2})^2}=\sqrt{13}$，$MN=\frac{1}{2}OB=1$ …………6 分

所以 $\angle PMN$ 的正切值为 $\sqrt{13}$

即直线 PM 与直线 OB 所成的角正切值为 $\sqrt{13}$ ………………8 分

18. **（本题满分 14 分，第 1 小题满分 7 分，第 2 小题满分 7 分）**

解：设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

（1）$F(1,0)$，得$n=1$ …………2 分

直线l的方程$x=my+1$代入$y^2=4x$得，$y^2-4myx-4=0$

所以$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$ …………4 分

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$=\sqrt{(m^2+1)\left((y_1+y_2)^2-4y_1y_2\right)}$$
$$=4(m^2+1)=8$$

所以$m=\pm1$ …………7 分

（2）抛物线$y^2=4x$的准线方程为$x=-1$ …………1 分

设$C(-1,y_3)$，由OA的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1}x$，

得$y_3=-\dfrac{y_1}{x_1}=-\dfrac{4}{y_1}$ …………4 分

由（1）知$y_1y_2=-4$，即$y_2=-\dfrac{4}{y_1}$ …………6 分

所以$y_3=y_2$，BC平行于x轴 …………7 分

19. **（本题满分 14 分，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分）**

解：（1）连接BD，由题意ΔABD是等边三角形，所以$BD=20$

又因为$\angle ADC=105^\circ$，所以$\angle DBC=45^\circ$ …………2 分

在ΔBCD中，$\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=\dfrac{BD}{\sin\angle C}$， …………4 分

得 BC=$\dfrac{20\sqrt{6}}{3}\approx16$（米） …………6 分

（2）设$\angle ADC=\theta$，则$\angle BDC=\theta-\dfrac{\pi}{3}$，$\angle CBD=\dfrac{2\pi}{3}-\theta$，

在ΔBCD中，$\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}=\dfrac{BD}{\sin\angle C}$，

所以$BC=\dfrac{40}{3}\sqrt{3}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$，$DC=\dfrac{40}{3}\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)$ …………4 分

所需板材的长度=$40+\dfrac{40}{3}\sqrt{3}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{40}{3}\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)$

$=40+\dfrac{40}{3}\sqrt{3}\sin\theta$， …………6 分

答：当$\angle ADC=\dfrac{\pi}{2}$时，所需板材最长为$40+\dfrac{40}{3}\sqrt{3}\approx 73$（米）. …………8 分

20．**（本题满分 16 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 6 分）**

解：（1） 当$a=0$时，$f(x)=x^3-2x$，$f(-x)=-x^3+2x$

所以$f(x)=-f(-x)$，$y=f(x)$为奇函数. …………2 分

当$a\neq 0$时，$f(1)=a-1$，$f(-1)=a+1$,

因为$f(-1)\neq \pm f(1)$，所以$f(x)$既不是奇函数也不是偶函数. …………4 分

（2）原问题可化为$a>\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{x}$在区间$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$有解，…………1 分

函数$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{x}$在区间$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$单调递减, …………3 分

所以$y_{\min}=\dfrac{5}{2}$, …………4 分

所以a的取值范围是$(\dfrac{5}{2},+\infty)$ …………6 分

（3）假设存在对称中心(m,n)，则

$x^3+ax^2-2x+(2m-x)^3+a(2m-x)^2-2(2m-x)=2n$恒成立

得$(6m+2a)x^2-(12m^2+4a)x+8m^3+4am^2-4m=2n$恒成立…………2 分

所以$\begin{cases}6m+2a=0\\12m^2+4am=0\\8m^3+4am^2-4m=2n\end{cases}$ …………4 分

得$m=-\dfrac{a}{3}$，$n=\dfrac{2a^3}{27}+\dfrac{2a}{3}$

所以函数$y=f(x)$有对称中心$(-\dfrac{a}{3},\dfrac{2a^3}{27}+\dfrac{2a}{3})$ …………6 分

21．**（本题满分 18 分，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分）**

解（1）数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=n$，$a_2=2$，$a_3=3$， …………2 分

因为$\dfrac{a_3^2}{a_2}=\dfrac{9}{2}$不是正整数，所以不是数列$\{a_n\}$的项，

所以数列$\{a_n\}$不是“X 数列”. …………4 分

（2）数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2^n-1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$,所以$a_n=2^{n-1}$. …………2 分

当$n\geq 3$时，取$k=m-1$，$l=m-2$， …………4 分

则$\dfrac{a_k^2}{a_l}=2^{2k-l-1}=2^{n-1}=a_n$，所以数列$\{a_n\}$是“Y 数列”. …………6 分

（3）证明：记$q=\dfrac{a_2}{a_1}$，因为数列$\{a_n\}$是各项均为正数的递增数列，

所以$q>1$,且当$k>l$时，$\dfrac{a_k}{a_l}>1$. …………1 分

若$k>l$ ，$a_n=\dfrac{a_k^2}{a_l}=\dfrac{a_k}{a_l}\times a_k>a_k>a_l$，则$n>k>l$.① ………2 分

因为数列$\{a_n\}$是“X 数列”，所以存在$i>j$,且$a_3=\dfrac{a_i^2}{a_j}$，

由①知,$3>i>j\geq 1$，所以$i=2, j=1$

即$a_3=\dfrac{a_2^2}{a_1}=a_1q^2$，即$a_1$，$a_2$，$a_3$成等比数列. …………4 分

因为数列$\{a_n\}$是“X 数列”，存在正整数k、$l\ (k>l)$，使得$a_4=\dfrac{a_k^2}{a_l}$，

由①得，$4>k>l$,所以$3\geq k>l$，

进而$a_4=\dfrac{a_k^2}{a_l}=a_1q^{2k-l-1}$，记$n_4=2k-l-1\in\mathbf{N}^*$.

因为数列$\{a_n\}$是“Y 数列”存在正整数m，使得$a_m=\dfrac{a_3^2}{a_2}=q\times a_3=a_1q^3$，

由$q>1$，得$a_m>a_3$. …………6 分

若$a_4=a_1q^{n_4}<a_1q^3$，再由$a_3=a_1q^2<a_4$，

得$2<n_4<3$，与$n_4\in\mathbf{N}^*$矛盾；

若$a_4>a_1q^3=a_m$，则$a_3<a_m<a_4$，与数列$\{a_n\}$递增矛盾，

所以$a_4=a_1q^3$,即a_1，a_2，a_3，a_4成等比数列. …………8 分